ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

AD USO DELLA SCUOLA CENTRALE

DELLE QUATTRO NAZIONI

DEL SIGNORE

S. F. LACROIX

PRIMA VERSIONE ITALIANA
FATTA SULL'OTTAVA EDIZIONE
DI PARIGI

FIRENZE
PRESSO GUGLIELMO PIATTI
1813

La presente Edizione è posta sotto la salvaguardia della Legge, essendosi adempito a quanto viene in essa prescritto.

TAVOLA

SUPPLEMENTO *al Trattato d'Aritmetica*. *Pag.* XXIX
Articoli concernenti l'estensione.

Nozioni generali sull'estensione.

1 Lo spazio, che i corpi occupano, ha tre dimensioni, *lunghezza*, *larghezza*, *e profondità o grossezza*. 1
I limiti del corpo son delle superficie, e non hanno che due dimensioni, *lunghezza*, *e larghezza*. *ivi*
I limiti delle superficie, ovvero i loro incontri scambievoli, son delle *linee*, e non hanno che una sola dimensione, cioè la *lunghezza*. *ivi*
I limiti delle *linee*, ovvero i loro incontri scambievoli, son de' punti, i quali non hanno alcuna dimensione. *ivi*
2 La linea retta è il più corto cammino per andare da un punto ad un altro. 2
Una linea retta è determinata da due punti, e non può prolungarsi al di là che in una sola maniera. *ivi*
Il piano è una superficie, nella quale si può applicare una linea retta in tutti i sensi. *ivi*

PRIMA PARTE

SEZIONE PRIMA.

Delle proprietà delle linee rette, e circolari. 3

Definizioni, e nozioni preliminari.
3 Non si considerano negli *Elementi di Geometria* che due specie di linee, cioè, la *linea retta*, e la *linea circolare*, di cui tutti i punti, situati sul medesimo piano, son egualmente lontani da un altro punto preso in questo piano, e che si chiama il *centro*. *ivi*
Le rette, le quali misurano la distanza dei punti qualunque della circonferenza dal suo centro, sono i *raggj* del Circolo. *ivi*
Una parte qualunque della sua Circonferenza si chiama *arco*. 4
S'intende per *Circolo* la porzione del piano terminata da tutte le parti dalla linea circolare. *ivi*
Per trovar tutti i punti, i quali sono ad una distanza data da un punto dato, fa di mestieri descrivere da quest'ultimo, come centro, e con un raggio eguale alla distanza data una Circonferenza di Circolo. *ivi*
4 Misurar la distanza di due punti, ovvero la lunghezza

d'una retta, vuol dir cercar quante volte questa retta ne contiene un'altra presa per unità. 4

Generalmente misurare una linea per un'altra vuol dire cercare il rapporto di queste due linee, ovvero cercare se v'è una linea più piccola, la quale sia contenuta un numero esatto di volte nell'una, e nell'altra, e che in conseguenza sia la misura comune d'ambedue. *ivi*

5 *Problema*. Essendo date due rette trovare la loro comune misura, o almeno il rapporto approssimativo dell'una all'altra. 5

6 Una retta non può incontrarne un altra se non che in un sol punto. 6

7 Lo spazio indefinito compreso tra due rette, le quali si tagliano in un punto, e si possono concepir prolungate tanto quanto vorremo, chiamasi *angolo*. *ivi*

Il punto ove s'incontran le linee, ovvero i *lati*, che forman l'angolo, si chiama *vertice*. *ivi*

8 Due angoli sono eguali allorchè, essendo posti l'uno sopra l'altro, essi ricuoprensi, o combaciano perfettamente.

Non è necessario perchè l'eguaglianza abbia luogo, che i lati d'un angolo abbian la medesima lunghezza di quelli dell'altro: serve solamente ch'essi combacino nella parte, ch'è a loro comune. 7

9 La posizion respettiva di due rette dipende dall'angolo, ch'esse fanno tra loro.

Una linea è *perpendicolare* sopra un'altra quando essa fa con quest'altra due angoli eguali. *ivi*

La perpendicolare non pende da nessun lato della retta, ch'essa incontra. *ivi*

Gli angoli, ch'esse formano, son chiamati *angoli retti*. *ivi*

Qualunque angolo minore d'un retto si dice *angolo acuto*. *ivi*

Qualunque angolo maggiore d'un retto si dice *angolo ottuso*. *ivi*

Tutti gli angoli retti sono eguali. *ivi*

10 La somma di tutti gli angoli, i quali si posson fare dalla medesima parte d'una retta, ed intorno ad un de'suoi punti preso per vertice, equivale sempre a due retti qualunque sia il numero di questi angoli. 8

11 Allorchè una retta cade sopra un'altra, essa fa con quest'ultima due angoli, i quali riuniti insieme equivalgono a due retti.

Due rette, le quali si tagliano, formano intorno dal loro punto d'incontro quattro angoli, i quali sono *opposti al vertice* due a due. *ivi*

12 *Teorema*. Gli angoli opposti al vertice sono eguali.

13 *Corollario*. Due perpendicolari forman tra loro quattro angoli retti. 9

La somma di tutti gli angoli, i quali si posson formare intorno ad un punto, non compone giammai se non che quattro angoli retti. *ivi*

14 Non si può rinchiudere uno spazio con un numero di rette minore di tre. Questo spazio si chiama *triangolo*. *ivi*

15 *Osservazioni*. La somma di due lati d'un triangolo sorpassa il terzo. 10

Se si prenda nell'interno d'un triangolo un punto qualunque, e si tirino delle rette da questo punto a due angoli del triangolo, la somma di queste rette sarà minore di quella de' due lati del triangolo, i quali le inviluppano. 10

Si distingnon sei cose in un triangolo, cioè, tre angoli, e tre lati. *ivi*

Esistou tra queste sei cose delle relazioni necessarie.

16 *Teorema* Allorchè due triangoli hanno un angolo eguale contenuto da due lati respettivamente eguali, essi sono eguali in tutte le loro parti. *ivi*

17 *Corollario*. Un triangolo è interamente determinato da uno de' suoi angoli, e dai due lati, che lo comprendono. 11

18 *Teorema*. Allorchè due triangoli hanno respettivamente un lato eguale adiacente a due angoli eguali, questi triangoli son perfettamente eguali. 12

19 *Teorema*. Se due lati d'un triangolo son respettivamente eguali a due lati d'un altro triangolo, e l'angolo compreso trai due primi sia minore dell'angolo compreso trai due ultimi, il lato opposto al maggiore di questi due angoli sorpasserà il lato opposto all'altro. *ivi*

20 *Corollario*. Due triangoli, di cui i tre lati sien respettivamente eguali, sono eguali in tutte le loro parti. 13

21 *Problema* Essendo dati separatamente i tre lati d'un triangolo, descrivere il triangolo. 14

22 *Osservazioni*. Affinchè si possa formare un triangolo con tre linee date, fa di mestieri che la somma di due qualunque di queste rette sia maggior della terza. *ivi*

23 *Problema*. In un punto dato preso sopra una retta data far un angolo, che sia eguale ad un angolo dato. 15

24 *Problema* Essendo dato un triangolo, costruirne un altro, il quale gli sia eguale, impiegando nella costruzion di quest'ultimo un angolo del primo, e i due lati, che lo comprendono. 16

25 *Problema*. Essendo dato un triangolo, costruirne un altro, che gli sia eguale, impiegando nella costruzion di quest'ultimo un lato del primo, ed i due angoli adiacenti. *iv*

Delle linee perpendicolari, e delle linee oblique.

26 *Teorema*. Le linee, le quali si partano da un punto qualunque della perpendicolare e si allontanano egualmente dal suo piede, sono eguali, e quelle, che se n'allontanan di più, son le più lunghe. 17

27 1.° *Corollario*. Due oblique, le quali sono eguali, cadono necessariamente da differenti lati della perpendicolare, ma ad eguali distanze dal suo piede. 18

28 2.° *Corollario*. La perpendicolare è la più corta di tutte le linee, che si posson condurre da un punto ad una linea data; allorchè la medesima cade sul mezzo di questa retta, dessa ha tutti i suoi punti ad egual distanza dalle due estremità; e tutti i punti presi fuor della perpendicolare sono inegualmente distanti da queste estremità. Da un punto ad una retta non si posson condurre tre rette eguali. *ivi*

29 *Problema*. Condurre sopra una linea data una perpendicolare, che la divida in due parti eguali. 19
30 *Problema*. Per un punto dato sopra una retta alzare una perpendicolare a questa retta. 20
31 *Problema*. Per un punto dato preso fuor d'una retta abbassare una perpendicolare su questa retta. *ivi*
32 *Teorema*. Da un punto preso fuori d'una retta non si può abbassare su questa retta che una sola perpendicolare. La stessa cosa ha luogo per qualunque punto preso sulla linea data. 21
33 1.° *Corollario*. Due rette perpendicolari ad una terza non s'incontrano, per quanto prolungate esse si suppongano, tanto al disopra, quanto al disotto di quest'ultima. *ivi*
34 2.° *Corollario*. Due triangoli, i quali hanno ciascuno un angolo retto, sono eguali, 1.° allorchè i loro lati respettivamente opposti agli angoli retti, come uno de' loro altri angoli sono eguali; 2.° allorchè oltre ai lati opposti agli angoli retti hanno ancora un lato respettivamente eguale. *ivi*
35 *Osservazioni*. Il secondo caso dell'eguaglianza, che si è dimostrata di sopra pei triangoli, i quali hanno un angolo retto, non conviene generalmente a tutti gli altri. 22
36 *Teorema*. Allorchè due lati d'un triangolo sono eguali gli angoli opposti a questi lati sono eguali; ed allorchè i lati sono ineguali il maggiore de' due è opposto al maggior angolo. 23
37 *Corollario*. Se due angoli d'un triangolo sono eguali tra loro i lati opposti a questi angoli son pure eguali tra loro. Il maggior de' due lati è quello, ch'è opposto al maggior angolo. Finalmente quando i tre lati d'un triangolo sono eguali i tre angoli lo sono pure, e reciprocamente. 24
38 I triangoli di cui i lati sono ineguali, si chiamano *scaleni*; quelli, i quali hanno due lati eguali, si chiamano *isosceli*, e quelli, i cui tre lati sono egnali, si chiamano *equilateri*. *ivi*

Teoria delle Paralelle.

39 Due rette le quali, benchè situate in un medesimo piano, non s'incontrano, son dette *paralelle* tra loro.
Due perpendicolari ad una medesima retta son dunque paralelle. 25
40 *Osservazione*. Una retta essendo perpendicolare sopra d'un'altra, qualunque retta, La quale sarà obliqua a quest'ultima, essendo prolungata sufficientemente, incontrerà necessariamente la prima. *ivi*
Nota, ove si dimostra questa Proposizione. *ivi*
41 *Teorema*. Allorchè due rette son perpendicolari ad una terza, tutte quelle, le quali son perpendicolari sopra una delle due prime sono nel tempo medesimo perpendicolari sull'altra. 26

42 *Corollario*. Due rette paralelle a una terza son paralelle tra loro. 28

43 *Teorema*. Allorchè due rette parelelle tra loro son tagliate da una terza, gli angoli, che desse fan con quest' ultima da un medesimo lato, l' uno al di fuori, l' altro al di dentro, sono eguali tra loro. *ivi*

44 *Teorema*. Se due rette fanno con una terza, e da un medesimo lato per rapporto a quest' ultima, due angoli egu li, l' uno al di dentro, l'altro al di fuori, queste due rette son paralelle tra loro. 29

45 *Osservazioni*. Si chiama *secante* qualunque retta, che tagli delle paralelle. Gli angoli situati dal medesimo lato della secante, e di cui l' apertura è volta dal medesimo lato. si chiamano *angoli corrispondenti*. Tutti gli angoli, la cui apertura è tralle paralelle, si chiamano *angoli interni*; e si chiamano *angoli esterni* quelli, la cui apertura è al difuori. Gli angoli, i quali sono in una situazione opposta tanto per rapporto alla secante che per rapporto alla paralelle, si chiamano *angoli alterni*. *ivi*

46 *Teorema*. Allorchè due paralelle son tagliate da una secante

1.° Gli angoli corrispondenti son eguali,

2.° Gli angoli alterni interni sono eguali,

3.° Gli angoli alterni esterni sono eguali,

4.° Gli angoli interni da un medesimo lato formano insieme due angoli retti,

5.° Gli angoli esterni da un medesimo lato formano insieme due angoli retti.

6.° Allorchè una qualunque di questa proprietà ha luogo le rette son necessariamente paralelle. 30

47 *Corollario*. Due rette respettivamente perpendicolari a due altre rette, le quali si tagliano, debbono necesariamente incontrarsi. 33

48 *Problema*. Per un punto dato condurre una retta paralella ad una retta data. *ivi*

49 *Problema*. Per un punto dato preso fuor d' una retta condurne un' altra, la quale faccia con la prima un angolo eguale ad un angolo dato. 34

50 *Teorema*. Gli angoli, i quali hanno i lati paralelli, e l' apertura volta nel medesimo senso, sono eguali. *ivi*

51 *Teorema*. I tre angoli d' un triangolo riuniti equivalgon sempre a due angoli retti. 35

N. B. L' angolo *esterno* d' un triangolo equivale egli solo a' due angoli interni opposti. *ivi*

52 *Corollario*. Quando due angoli d' un triangolo son respettivamente eguali a due angoli d' un altro triangolo il terzo angolo dell' uno è eguale al terzo angolo dell' altro. *ivi*

Un triangolo non può avere che un solo angolo retto, ed a più forte ragione che un solo angolo ottuso. *ivi*

53 Si chiama *triangolo rettangolo* quello, che ha un angolo retto, *acutangolo* quello, che non ha che degli angoli acuti, e *ottusangolo* quello, che ha un angolo ottuso. Le due ultime specie son comprese sotto la denominazione

di *triangoli obliquangoli*. Nel triangolo equilatero, di cui tutti gli angoli sono eguali, ciascun angolo è i due terzi d'un retto. 35
54 *Teorema*. Le porzioni di paralelle intercette tra paralelle sono eguali, e reciprocamente. 36
55 *Corollario*. Due paralelle sono per tutto egualmente lontane l'una dall'altra. 37
56 *Teorema*. Se dne rette qualunque son tagliate da un numero qualunque di paralelle condotte da dei punti presi a distanze eguali sulla prima, le parti della seconda saranno pure eguali tra loro. *ivi*
57 *Corollario*. Un numero qualunque di parti della prima retta sta a un egual numero di parti della seconda, come la prima retta intera sta alla seconda intera *ivi*
58 *Teorema*. Tre paralelle taglian sempre due rette qualunque in parti proporzionali. 38
Nota sui rapporti incommensurabili. 40
59 1.° *Corollario*. Se si conduca in un triangolo una retta paralella ad un de'suoi lati, gli altri due lati saranno tagliati in parti proporzionali da questa retta. *ivi*
60 2.° *Corollario* Reciprocamente, allorchè una rette taglia due lati d'un triangolo in parti proporzionali, essa è paralella al terzo. 41
61. 3.° *Corollario*. La retta, che divide in due parti eguali, uno degli angoli d'un triangolo qualunque, divide il lato opposto in due segmenti proporzionali ai lati adiacenti. *ivi*
62. *Problema*. Trovare una quarta proporzionale a tre linee date. 42
63 Due triangoli son *simili* allorchè gli angoli dell'uno sono eguali agli angoli dell'altro, e che i lati, i quali in ambedue sono opposti ad angoli eguali, e che per qnesta ragione si chiaman *lati omologhi*, sono proporzionali. Una di queste condizioni porta sempre seco l'altra. 43
64 *Teorema*. Allorchè due triangoli banno i loro angoli respettivamente eguali i loro lati omologhi son proporzionali, ed i triangoli sono in conseguenza simili. *ivi*
65 *Corollario*. Due triangoli son simili; 1.° allorchè dessi hanno solamente due angoli respettivamente eguali; 2.° allorchè i loro lati son respettivamente paralelli; 3.° allorchè i loro lati son respettivamente perpendicolari. 44
66 *Teorema*. Dne triangoli son simili allorchè dessi hanno un angolo eguale, scambievolmente contenuto tra lati proporzionali. 45
67 *Teorema*. Due triangoli i quali hanno i lati respettivamente proporzionali, son simili. 46
68 *Problema*. Costruire sopra una retta data un triangolo simile ad un triangolo dato. 47
69 *Teorema*. Tante linee quante vorremo condotte per un medesimo punto, ed incontrate da due paralelle, son tagliate da queste paralelle in parti proporzionali, e le taglian pure in parti proporzionali. *ivi*
70 *Problema*. Dividere una retta data nella stessa maniera che un altra è stata divisa. 49
71 *Osservazione*. Altra soluzione del medesimo Problema. 50

72 1.° *Corollario*. Divisione d'una retta in parti eguali. 51
73 2.° *Corollario*. Costruzione delle *scale*. 52
74 *Teorema*. Se dall'angolo retto d'un triangolo rettangolo, si abbassi una perpendicolare sul lato opposto, il quale chiamasi *ipotenusa*, 1.° questa perpendicolare dividerà il triangolo in due altri, i quali gli saranno simili, e che lo saranno in conseguenza tra loro; 2.° essa dividerà l'ipotenusa in due parti, o *segmenti* tali che ciascun lato dell'angolo retto sarà medio proporzionale tra il segmento, che gli è adiacente, e l'ipotenusa intera; 3.° la perpendicolare sarà media proporzionale tra i due segmenti dell'ipotenusa. 53
75 *Corollario*. La 2.ª potenza del numero, ch'esprime la lunghezza dell'ipotenusa, è eguale alla somma delle seconde potenze de' numeri, i quali esprimono le lunghezze de' due altri lati. 54
76 *Teorema* I tre lati di un triangolo qualunque essendo riportati ad una misura comune, ed espressi per conseguenza in numeri. se dall'estremità d'uno qualunque di questi lati si abbassi una perpendicolare sopra uno degli altri due, la seconda potenza del primo sarà eguale alla somma delle seconde potenze degli ultimi, meno due volte il prodotto del lato, sul quale cade la perpendicolare, per la distanza di questa perpendicolare dall'angolo opposto al primo lato, se quest'angolo è acuto, e più due volte il medesimo prodotto, se quest'angolo è ottuso. 55
77 *Corollario*. Un triangolo è acutangolo, rettangolo, o ottusangolo secondochè la seconda potenza del maggior dei suoi lati è minore della somma delle seconde potenze degli altri due lati, le è eguale, o la sorpassa.

Dei Poligoni.

78 Le superficie piane terminate da un complesso qualunque di linee rette si chiaman *poligoni*. 58
ivi
Il più semplice di tutti è il triangolo; i poligoni di quattro lati si chiamano in generale *quadrilateri*, di cinque *pentagoni*, di sei *esagoni*, di sette *ettagoni*, di otto *ottagoni*. di nove *enneagoni*, di dieci *decagoni*, di dodici *dodecagoni*, di quindici *pentadecagoni*. *ivi*
Gli angoli, la cui apertura è al dientro del poligono, son degli angoli *salienti*; quelli, la cui apertura è al dl fuori, si chiaman *rientranti*. *ivi*
Le linee tirate dagli angoli del poligono, i quali non sono adiacenti al medesimo lato, si chiamano *diagonali*. *ivi*
79 Il poligono di quattro lati, di cui quelli opposti son paralelli, si chiama *paralellogrammo*. 59
1.° Ciascuna diagonale divide il paralellogrammo in due triangoli eguali. *ivi*
2.° I lati opposti d'un paralellogrammo son respettivamente eguali. *ivi*
3.° Se i lati opposti d'una Figura di quattro lati sono eguali, come pure se due lati opposti sono eguali, e paralelli, questa Figura è un paralellogrammo. *ivi*

80 *Teorema*. Le due diagonali d'un paralellogrammo si tagliano scambievolmente in due parti eguali. 64

81 *Teorema*. Unendo uno degli angoli d'un poligono con tutti gli altri, si divide questo poligono in un numero di triangoli eguale a quello de' suoi lati diminuito di due unità. *ivi*

82 *Corollario*. La somma di tutti gli angoli interni d'un poligono equivale a tante volte due retti quanti sono i lati meno due. 65

83. *Teorema*. Se si prolunghino nel medesimo senso tutti i lati d'un poligono, il quale non ha angoli rientranti, la somma degli angoli esterni è eguale a quattro retti, qualunque sia d'altronde il numero de' lati del poligono. *ivi*

84 *Osservazione*. Due poligoni sono eguali allorchè dessi son composti d'un medesimo numero di triangoli eguali, e similmente disposti. *ivi*

85 *Teorema*. Allorchè si conoscono tutti i lati d'un poligono ad eccezione d'un solo, e che si conoscono pure gli angoli compresi tra i lati dati, il poligono è determinato, e può esser costrutto. 62

86 *Osservazione*. Affine di determinare un poligono d'un numero N di lati son necessarj 2 N — 3 dati, tra i quali gli angoli non debbon contare che per N — 1 dati. 63

87 Si chiamano *poligoni simili* quelli, di cui gli angoli son eguali, e di cui i lati omologhi sono proporzionali. *ivi*

88 *Teorema*. Due poligoni composti d'un medesimo numero di triangoli respettivamente simili, e similmente disposti hanno i loro angoli respettivamente eguali, i loro lati omologhi proporzionali, e sono in conseguenza simili. *ivi*

89 *Teorema*. Allorchè due poligoni sono simili essi son composti d'un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e similmente disposti. 64

90 *Problema*. Costruire sopra una retta data un poligono simile ad un poligono dato. 65

91 *Osservazione*. Altra maniera di dividere dei poligoni in triangoli. 66

Nota sull'Arte di levar di pianta. *ivi*

92 *Teorema*. Se si tirino in due poligoni simili due rette, le quali sieno similmente poste nell'uno, e nell'altro, esse saranno proporzionali ai lati omologhi de' poligoni. 67

93 *Teorema*. I contorni di due poligoni simili stanno tra loro come i lati omologhi di questi poligoni. 68

Della Linea retta, e del Circolo.

94 Una retta, ed un Circolo non posson tagliarsi in più di due punti. *ivi*

Qualunque retta, la quale taglia la Circonferenza del Circolo, e ch'è prolungata al di fuori, si chiama *secante*.

La parte di questa retta compresa nel Circolo si chiama *corda*.

95 La corda, che passa per l'estremità d'un arco, ovvero che lo *sottende*, è detta la *sua corda*. 69

La medesima corda appartiene a due archi, i quali, riuniti, formano la Circonferenza intera. 69

96 Allorchè una corda passa pel centro, le si dà il nome di *diametro*. *ivi*

Tutti i diametri del Circolo sono eguali tra loro. *ivi*

Il diametro è la maggior retta, che si possa tirare nella Circonferenza del Circolo. *ivi*

97 Il diametro divide la Circonferenza in due parti eguali.

Due Circoli descritti con un medesimo raggio sono eguali. *ivi*

98 *Teorema*. Se si porti un arco qualunque di Circolo sopra un altro arco del medesimo Circolo, o d'un Circolo descritto col medesimo raggio del primo, in modo che due punti qualunque d'uno degli archi cadano sopra due dell'altro, e le convessità sieno volte dal medesimo lato, il più piccolo di quest'archi combacierà per tutta la sua estensione col più grande. 70

Nota su questa proprietà del Circolo, che gli è comune colla linea retta, e che dimostra la similitudine di tutte le sue parti, ovvero l'uniformità della sua curvatura. *ivi*

99 *Corollario*. In un medesimo Circolo, o in due Circoli descritti col medesimo raggio, gli archi, le cui corde sono eguali son pur eguali allorchè dessi son della medesima specie, valea dire ambedue minori della mezza-circonferenza, ovvero ambedue maggiori; e reciprocamente, quando, gli archi sono eguali, le corde sono eguali *ivi*

100 *Teorema*. In un medesimo Circolo, o in Circoli eguali il maggior arco ha la maggior corda, e reciprocamente, semprechè gli archi, i quali si paragonano, sieno minori della mezza-circonferenza. 71

101 *Problema*. Essendo dati due archi del medesimo Circolo, o di Circoli eguali, trovare il rapporto delle loro lunghezze. *ivi*

102 *Osservazione*. La retta, la quale non ha che un punto di comune col Circolo, ovvero che non fa che toccarlo, si chiama *tangente*. 73

103 *Teorema* La perpendicolare condotta da un punto della Circonferenza del Circolo sul raggio, che passa per questo punto, è tangente del Circolo; e reciprocamente, la tangente ad un punto qualunque della Circonferenza è perpendicolare all'estremità del raggio condotto per questo punto. *ivi*

104 *Corollario*. Si conduce una tangente ad un punto dato della Circonferenza del Circolo inalzando una perpendicolare all'estremità del raggio, che passa per questo punto. 74

105 *Teorema*. Qualunque retta alzata perpendicolarmente sul mezzo d'una corda passa pel centro del Circolo, e pel mezzo dell'arco sotteso da questa corda. *ivi*

106 1.° *Corollario*. Il mezzo d'una corda, il centro del Circolo, ed il mezzo dell'arco sotteso dalla corda essendo in linea retta, allorchè una retta passa per due di questi punti, essa passa necessariamente pel terzo. 75

Qualunque perpendicolare abbassata dal centro, o dal

mezzo dell' arco sulla corda cadrà sul mezzo di questa retta 75
107 2.° *Corollario*. Affin di dividere un arco in due parti eguali serve d'alzare una perpendicolare sul mezzo della corda, la quale sottende quest'arco. *ivi*
108 *Teorema*. In un medesimo Circolo gli archi intercetti tra due corde paralelle, ovvero tra una tangente, ed una corda paralella sono eguali. *ivi*
109 *Teorema*. Se dai vertici di due angoli si descrivan due archi di Circolo col medesimo raggio, il rapporto degli archi compresi tra i lati di ciascun angolo sarà lo stesso di quello di questi angoli. 76
110 1.° *Corollario*. Il rapporto degli archi essendo lo stesso di quello degli angoli, ne segue che la misura d'un angolo è l'arco di Circolo compreso trai suoi lati, e descritto dal suo vertice come centro. 78
111 2.° *Corollario*. Le rette, le quali dividono un arco in più parti eguali, dividono pure in un medesimo numero di parti egnali l'angolo, il quale misura quest'arco. 79
112 *Teorema* Allorquando un angolo ha il suo vertice posto sulla Circonferenza d'un Circolo esso ha per misura la metà dell'arco compreso trai suoi lati. 80
113 1.° *Corollario*. L'angolo formato da una corda, e dal prolungamento d'un' altra corda ha per misura la metà della somma degli archi sottesi da queste corde al difuori dell'angolo, ch'esse formano. 81
114 2.° *Corollario* 1.° Tutti gli angoli, i quali hanno il loro vertice posto alla Circonferenza, e s'appoggiano sul medesimo arco, sono eguali. *ivi*
2.° L'angolo, il cui vertice è sulla Circonferenza, e di cui i lati passano per l'estremità del diametro, è retto.
115 *Teorema*. L'angolo, il cui vertice è posto nel Circolo tra il centro, e la Circonferenza, ha per misura la metà dell'arco compreso trai suoi lati, più la metà dell'arcò compreso trai loro prolungamenti. 82
116 *Teorema*. L'angolo, il cui vertice è posto fuori del Circolo, ha per misura la metà della differenza degli archi compresi trai suoi lati, e di cui uno volta la sua concavità verso il vertice, e l'altro la sua convessità. 83
117 *Problema*. Alzare una perpendicolare sull'estremità d'una linea retta senza prolungarla. 84
118 *Problema*. Da un punto dato fuori d'un Circolo condurre una tangente a questo Circolo. *ivi*
119 *Problema*. Per tre punti, i quali non sono in linea retta, far passare una Circonferenza di Circolo. 85
120 *Corollario*. Per tre punti dati non si può far passare che una sola Circonferenza di Circolo. *ivi*
Il Problema diviene insolubile quando i tre punti sono in linea retta.
121 2.° *Corollario*. Due Circoli non possono avere tre punti comuni senza confondersi, e non potranno incontrarsi per conseguenza in più di due punti. *ivi*
122 *Teorema*. Due Circoli, i quali passano per un medesimo

punto della retta, che unisce i lor centri, non han che questo punto di comune, nel quale essi in conseguenza si toccano; e reciprocamente, se due Circoli si toccano, i loro centri, ed il punto di contatto sono in linea retta. 86

123 *Osservazioni*. Condizioni, le quali debbono aver luogo affinchè due Circoli si taglino. 87

La perpendicolare alzata pel punto di contatto di due Circoli sulla linea, che unisce i loro centri, tocca nel tempo medesimo questi due Circoli. 88

Tra un Circolo, e la sua tangente non si può condurre alcuna retta, ma vi si può far passare un' infinità di Circoli differenti. *ivi*

Nota Sull' angolo del contatto. *ivi*

124 *Problema*. Descrivere un Circolo, il quale tocchi in un punto dato una retta data di posizione, e passi per un secondo punto dato. *ivi*

125 *Problema*. Descrivere un Circolo, il quale tocchi in un punto dato un altro Circolo dato, e passi per un secondo punto dato. 89

126 *Problema*. Descrivere sopra una linea data un Circolo tale che tutti gli angoli aventi il lor vertice alla di lui Circonferenza, e si appoggiano su questa retta, sieno eguali ad un angolo dato; ovvero descrivere un *segmento* di Circolo *capace* d' un angolo dato. *ivi*

127 *Teorema*. Due secanti, le quali partano da un medesimo punto preso fuori del Circolo, essendo prolungate fino alla parte della Circonferenza la più lontana da questo punto, son reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne. 90

128 *Osservazioni*. La tangente è media proporzionale tra la secante, e la sua parte esterna. 91

Dimostrazione *a priori* di questa Proposizione *ivi*

129 *Teorema*. Due corde, le quali s' incontrano dentro un Circolo, si tagliano in parti reciprocamente proporzionali. *ivi*

Osservazione. Enunciato comune al Teorema suddivisato, ed a quello del N. 127. 92

Allorchè due rette, che si tagliano, incontrano nel medesimo tempo una Circonferenza di Circolo, ciascuna in due punti, le distanze dal loro punto d' incontro a ciascuno di quelli ov' esse tagliano la Circonferenza del Circolo, sono reciprocamente proporzionali. *ivi*

130 *Corollario*. La perpendicolare alzata sopra un diametro, e terminata dalla Circonferenza, è media proporzionale trai due segmenti del diametro. *ivi*

Come si trovi una media proporzionale tra due linee date. *ivi*

131 *Osservazione*. Dimostrazione della Proposizione precedente ricavata dal triangolo rettangolo. 93

La corda condotta dall'estremità del diametro è media proporzionale tra il diametro, ed il segmento determinato dalla perpendicolare abbassata dall' altra estremità di questa corda. *ivi*

Altra maniera di trovare una media proporzionale tra due linee date *ivi*

132 *Problema*. Dividere una linea *in media ed estrema ragione*, vale a dire in modo che la maggiore delle due parti sia media proporzionale tra la linea intera, e l'altra parte. 93

133 *Problema*. Descrivere un Circolo, il quale passi per due punti dati, e tocchi una linea retta indefinita data di posizione. 94

Nota. Sulle diverse soluzioni, di cui questo Problema, ed il precedente son suscettibili. 95

134 *Teorema*. In un semicircolo le seconde potenze delle lunghezze delle corde, le quali partono da una delle estremità d'un diametro, son proporzionali ai segmenti compresi su questo diametro tra l'estremità comune a tutte queste corde, ed il piede della perpendicolare abbassata dall'altra estremità. 96

Dei Poligoni iscritti, e circoscritti al Circolo.

135 *Osservazione*. Si può far passare un Circolo pei vertici degli angoli d'un triangolo qualunque · In questo caso il triangolo è *iscritto* nel Circolo, ed il Circolo è *circoscritto* al triangolo. *ivi*

Altra dimostrazione delle Proposizioni de' numeri 36, 37, e 51. *ivi*

136 *Problema*. Iscrivere un Circolo in un triangolo dato, vale a dire, descrivere nell'interno di questo triangolo un Circolo, il quale non faccia che toccare tutti tre i lati. 97

137 *Osservazione*. Non si posson generalmente iscrivere in un Circolo tutti i poligoni di quattro, ovvero d'un maggior numero di lati. 98

Nota sul carattere de' quadrilateri iscritti nel Circolo.

138 *Teorema*. Ogni poligono d'un numero qualunque di lati, allorchè è *regolare*, vale a dire, allorchè egli ha tutti i suoi angoli eguali, e tutti i suoi lati eguali, può essere iscritto, e circoscritto al Circolo. 99

139 Gli angoli formati dai raggi condotti dal centro del poligono a ciascun de' suoi angoli, si chiamano *angoli al centro*, e la loro somma essendo equivalente a quattro retti, ciascun di essi è eguale a questa somma divisa pel numero degli angoli, o de' lati del poligono proposto. 100

140 *Teorema*. I poligoni regolari d'un medesimo numero di lati son simili, ed i loro contorni stanno tra loro come i raggi de' Circoli, ai quali essi sono iscritti, o circoscritti. *ivi*

141 *Problema*. Un poligono d'un numero qualunque di lati essendo iscritto nel Circolo, iscrivere nel medesimo Circolo un secondo poligono d'un numero di lati doppio di quello de' lati del primo, e trovare il valore d'uno de' lati del secondo. 101

142 Il quadrilatero, di cui gli angoli, e i lati sono eguali, si chiama *quadrato*; ciascun de' suoi angoli è retto. 102

143 *Osservazioni*. Il quadrato è un paralellogrammo; il paralellogrammo, di cui i lati sono eguali, e gli angoli

ineguali, si chiama *rombo* o *losanga*; quello, i cui quattro angoli son retti, ed i lati ineguali, si chiama *rettangolo*; qualunque rettangolo può iscriversi in un Circolo. 102
144 *Problema*. Costruire un quadrato sopra una linea data.
145 *Problema*. Iscrivere in un Circolo i poligoni di 4, 8, 16, 32, 64, ec. lati. 105

Nota. Sulla maniera d'ottenere $\sqrt{2}$ geometricamente. 106
146 *Problema*. Iscrivere in un Circolo i poligoni di 3, 6, 12, 24, 48, ec. lati. *ivi*
147 *Problema*. Iscrivere in un Circolo i poligoni di 5, 10, 20, 40, ec. lati. 106
148 *Osservazione*. La differenza tra gli archi sottesi dai lati dell'esagono, e del decagono, dà la quindicesima parte della Circonferenza; la corda di quest'arco è il lato del pentadecagono, e mediante la sua *bisezione* otterremo i poligoni di 30, 60, ec. lati. 107
Nota. Sulla divisione del Circolo in $2n+1$ parti. 108
149 *Problema*. Un poligono regolare d'un numero qualunque di lati essendo iscritto in un Circolo, circoscrivere a questo Circolo un poligono regolare del medesimo numero di lati; e reciprocamente, essendo, dato il poligono circoscritto, costruire il poligono iscritto. *ivi*
150 *Corollario*. Espressione del lato del poligono regolare circoscritto col mezzo del poligono iscritto corrispondente. 110
151 *Osservazioni*. La differenza tra il poligono iscritto, ed il poligono circoscritto corrispondente diminuisce a misura che si aumenta il numero de' loro lati, e si posson sempre trovare due poligoni, l'uno iscritto, l'altro circoscritto tali che la differenza dei loro contorni sia minore d'una grandezza data, per quanto piccola sia questa grandezza. *ivi*
152 *Corollario*. La Circonferenza del Circolo è minore del contorno del poligono circoscritto, e maggiore di quello del poligono iscritto; si può sempre trovare un poligono tanto iscritto quanto circoscritto tali, che la differenza tra il suo contorno, e la Circonferenza del Circolo sia minore d'una grandezza data, per quanto piccola sia questa grandezza. 112
153 Se due grandezze invariabili A, e B son tali che si possa dimostrare che la lor differenza A—B è minore d'una terza grandezza δ, per quanto piccola che possa esser quest'ultima, queste due grandezze sono eguali tra loro. 113
154 *Teorema*. Le Circonferenze de' Circoli stanno tra loro come i loro raggj, ovvero come i loro diametri. 114
Nota. Altra dimostrazione del medesimo Teorema. 115
155 *Corollario*. Mezzo di calcolar la lunghezza d'una Circonferenza, della quale si conosce il raggio. 116
156 *Problema*. Trovare il rapporto approssimativo della Circonferenza al diametro.
Nota. Rapporto della Circonferenza al diametro, depositato in un' Opera de' Bramini. 118
157 *Osservazioni*. Soluzione compendiosa del Problema precedente. 120

SEZIONE SECONDA.

Dell'area de' poligoni, e di quella del Circolo

158 La porzion d'estensione contenuta tra le linee, che terminano una Figura, si chiama la *superficie*, o l' *area* di questa Figura. 123

Nota. Sull' uso delle parole *superficie*. e *area*. *ivi*

159 Due Figure di forme differenti, ma d'un' estensione eguale son dette *equivalenti*. *ivi*

160 Nei triangoli. e nei paralellogrammi si prende arbitrariamente per *base* uno dei lati, e si chiama *altezza* la perpendicolare abbassata dall' angolo opposto a questo lato nel triangolo, o da un punto qualunque del lato opposto nel paralellogrammo. 124

161 *Teorema*. Due paralellogrammi della medesima base, e della medesima altezza sono equivalenti. *ivi*

162 *Teorema*. Un triangolo qualunque è la metà d'un paralellogrammo della medesima base, e della medesima altezza. 125

163 *Corollario*. Due triangoli, i quali hanno la medesima base. e la medesima altezza, sono equivalenti. *ivi*

164 *Problema*. Trasformare un poligono in un altro, il quale abbia un lato di meno, e che sia equivalente. 126

165 Si può cangiare di tal maniera un poligono qualunque in un triangolo equivalente. *ivi*

166 *Teorema*. Due rettangoli della medesima base stanno tra loro come le loro altezze. 127

167 *Teorema*. Due rettangoli qualunque stanno tra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze. 129

Nota. Sulla considerazione de' prodotti dell' aree. *ivi*

168 *Osservazione*. Sulla misura dell' aree in generale, e sul senso dell'espressione *l' area d' un rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza*. 130

166 1.° *Corollario*. L' area d'un quadrato si misura colla seconda potenza del suo lato. 132

170 2.° *Corollario*. L' area d'un paralellogrammmo si misura col prodotto della sua base per la sua altezza. *ivi*

Due paralellogrammi qualunque stanno nel rapporto de' prodotti delle loro basi per le loro altezze. *ivi*

171 3.° *Corollario*. L' area d'un triangolo si misura colla metà del prodotto della sua base per la sua altezza. *ivi*

I triangoli qualunque stanno tra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze. *ivi*

172 *Problema*. Trasformare un paralellogrammo, ovvero un triangolo in un quadrato. 133

173 *Corollario* Trasformare un poligono qualunque in un quadrato equivalente. *ivi*

174 *Osservazione*. Si valuta l' area d' un poligono qualunque prendendo la somma di quelle de' triangoli, che le compongono, 134

175 *Teorema*. L' area d' un quadrilatero, nel quale due lati

son paralelli, e che per questa ragione si chiama *trapezio*, si misura col prodotto della semisomma de' due lati paralelli moltiplicata per l' altezza presa tra questi lati. 134

L' area del trapezio si misura pure col prodotto della sua altezza moltiplicata per una linea condotta ad egual distanza dalle due basi paralelle. *ivi*

176 *Teorema*. Le aree de' poligoni simili stanno tra loro come i quadrati de' lati omologhi di questi poligoni. 135

177 *Teorema*. Le aree di due triangoli, i quali hanno un angolo comune, stanno nel rapporto dei prodotti de' lati, i quali comprendon quest' angolo. 136

178 *Teorema*. Il quadrato costrutto sull' ipotenusa d' un triangolo rettangolo, è equivalente alla somma de' quadrati costrutti sui due altri lati di questo triangolo. 137

179 1.° *Corollario*. I quadrati costrutti sui lati dell' angolo retto d' un triangolo rettangolo, e sull' ipotenusa, stanno tra loro come i segmenti adiacenti, e l'ipotenusa intera. 138

180 2.° *Corollario*. Qualunque poligono costrutto sull' ipotenusa d' un triangolo rettangolo è equivalente alla somma de' poligoni simili costrutti sui due altri lati. *ivi*

181 *Problema*. Costruire un poligono simile ad un altro, e di cui l'area sia in un rapporto dato con quella del primo, ovvero sia equivalente ad un quadrato dato. 139

182. *Teorema*. L' area d' un poligono regolare ha per misura la metà del prodotto del suo contorno pel raggio del Circolo iscritto. 140

Questo contorno si chiama *perimetro*, ed il raggio del Circolo iscritto si chiama *apotèma*. *ivi*

183 *Corollario*. Le aree de' poligoni regolari stanno tra loro come i quadrati de' raggi de' Circoli, nei quali essi sono iscritti, o ai quali essi son circoscritti 141

184 *Osservazione*. Egli è sempre possibile di trovar due poligoni del medesimo numero di lati, l'uno iscritto, l'altro circoscritto tali che la differenza delle loro aree sia minore d' una grandezza data, per quanto piccola sia questa grandezza. *ivi*

185 *Corollario*. Si può sempre assegnare un poligono regolare tanto iscritto, quanto circoscritto, la cui area differisca tanto poco quanto vorremo da quella d' un Circolo dato, 142

186 *Teorema*. Le tre grandezze A, B, X essendo tali che la prima A, che si suppone variabile, ma che peraltro sorpassando sempre le altre due B, e X, le quali non cangiano, possa approssimarsi ad ambedue nel medesimo tempo, tanto davvicino quanto vorrassi, avremo necessariamente B = X. *ivi*

187 *Teorema*. L' area d' un Circolo ha per misura la metà del prodotto della Circonferenza moltiplicata pel raggio. 144

Nota. Altra dimostrazione della medesima Proposizione. *ivi*

188 *Corollario*. Le aree dei Circoli stanno tra loro come i quadrati de' loro raggj, ovvero dei loro diametri. *ivi*

L' area d' un Circolo è eguale al quadrato del raggio moltiplicato pel rapporto della Circonferenza al diametro. *ivi*

189 *Teorema*. L'area d'un *settore di Circolo* ha per misura la metà del prodotto dell'arco moltiplicato pel raggio. 145
190 *Osservazione*. L'area d'un *segmento* s'ottiene togliendo dall'area del settore quella del triangolo corrispondente. 146

SECONDA PARTE

SEZIONE PRIMA

De' Piani, e de' Corpi terminati da delle superficie piane.

Dei piani, e delle linee rette. 147
191 Una linea retta, la quale ha due dei suoi punti in un piano, vi si trova tutta intera. *ivi*
192 L'intersezione di due piani è una linea retta. *ivi*
193 Son necessarj tre punti per determinare un piano, ovvero due piani aventi tre punti comuni, i quali non sieno in linea retta, coincidono perfettamente. *ivi*
194 Due linee, le quali si tagliano, sono in un medesimo piano. 148
Qualunque triangolo è in un sol piano; e quattro punti, i quali non sono nel medesimo piano, formano un *quadrilatero storto, o gobbo* *ivi*
195 Nello spazio due rette possono esser perpendicolari a una terza senza esser paralelle tra loro. 149
196 *Teorema*. Una retta alzata fuori d'un piano perpendicolarmente a due altre, condotte pel suo piede in questo piano, è perpendicolare a tutte quelle, che si potrebber condurre per questo punto nel medesimo piano. *ivi*
197 *Osservazione*. La linea condotta dietro al Teorema precedente è perpendicolare al piano, sul quale essa è inalzata. 150
198 *Teorema*. Se tre rette son perpendicolari ad una medesima retta in un medesimo punto, esse son tutte tre in un medesimo piano perpendicolare a quest'ultima. *ivi*
199 *Teorema*. Per un punto preso tanto fuori d'un piano che su questo piano non si può condurre che una sola perpendicolare a questo piano; e pel medesimo punto di una retta non può passare che un sol piano perpendicolare a questa retta. 151
200 *Teorema*. Le oblique, le quali si allontanano egualmente dalla perpendicolare ad un piano, sono eguali; quelle, che si allontanan di più, son le più lunghe; e la perpendicolare è la più corta di tutte le rette, le quali si posson condurre da un punto dato ad un piano. *ivi*
201 *Osservazioni*. Ciascun punto della perpendicolare ad un piano può esser impiegato a descrivere in questo piano de' Circoli, il cui centro sia al suo piede. 152
La perpendicolare essendo la più corta linea, che si possa condurre da un punto preso fuori d'un piano sopra questo piano, è la misura naturale della lor distanza. *ivi*

202 *Teorema*. Se per un punto d'una retta obliqua ad un piano si abbassi su questo piano una perpendicolare, e si uniscano i piedi dell'obliqua, e della perpendicolare con una retta, la perpendicolare a quest'ultima sarà pure perpendicolar sull'obliqua. 152

203 *Teorema*. Una retta situata fuori d'un piano, ma paralella ad una linea qualunque condotta in questo piano, non l'incontra, per quanto prolungata essa supponga si, ed è nel medesimo tempo paralella a qualunque retta condotta nel piano paralellamente alla prima. 153

204 *Corollario*. Due rette paralelle ad una terza son paralelle tra loro. 154

205 *Teorema*. Gli angoli, i quali hanno i loro lati paralelli, e l'apertura volta nel medesimo senso, sono eguali, benchè situati in de' piani diversi. *ivi*

206 *Teorema*. Se per un punto qualunque dalla sezion comune di due piani si conducano in ciascuno di questi piani delle rette respettivamente perpendicolari a questa sezion comune, e l'angolo, ch'esse forman tra loro. sia eguale a quello, che forman due altre rette condotte nella medesima maniera in due altri piani, potremo far coincidere i due primi piani coi due ultimi. *ivi*

207 *Corollario*. Lo spazio indefinito compreso tra due piani, i quali si tagliano, si chiama *angolo diedro*, ovvero *angolo a due facce;* esso misura la loro *inclinazione*. 155

L'angolo diedro ha per misura l'angolo piano formato da due rette condotte in ciascuna delle sue facce perpendicolarmente alla loro comune sezione, e per un medesimo punto di questa retta. 156

Gli angoli diedri godono della medesima proprietà degli angoli piani, che gli misurano. *ivi*

Nota. Ragione della denominazione d'*angolo diedro*. *ivi*

208 *Corollario*. Un piano condotto per una linea perpendicolare ad un altro piano è perpendicolare a quest'ultimo. 157

Per una retta presa in un piano non si può inalzare che un sol piano perpendicolare al primo. 158

209 *Teorema*. Se per un punto qualunque della comun sezione di due piani, i quali s'incontrano ad angolo retto, si alzi perpendicolarmente al primo una retta, essa sarà compresa nel secondo. *ivi*

210 *Corollario*. L'intersezione di due piani perpendicolari ad un terzo è perpendicolare a quest'ultimo. *ivi*

211 *Teorema*. La retta condotta in un piano perpendicolarmente alla sezion comune di esso con un altro, il quale lo incontra ad angolo retto, è perpendicolare a quest'ultimo. *ivi*

212 *Teorema*. Due rette perpendicolari ad un medesimo piano son paralelle tra loro; e reciprocamente, se una retta è perpendicolare ad un piano, qualunque altra retta paralella a quest'ultima sarà pure perpendicolare al medesimo piano. 159

213 *Teorema*. Due piani perpendicolari ad una medesima retta non possono incontrarsi. *ivi*

214 Due piani perpendicolari ad una medesima retta non incontrandosi, son *paralelli* tra loro. 160
215 *Teorema*. Allorchè due piani paralelli son tagliati da un terzo le intersezioni son paralelle tra loro. *ivi*
216 *Corollario*. Due piani paralelli hanno le loro perpendicolari comuni. *ivi*
La distanza di due piani paralelli è per tutto la medesima. *ivi*
217 *Teorema*. Se due rette, le quali si tagliano, son paralelle a due altre rette, le quali si tagliano, il piano determinato dalle due prime sarà paralello a quello, il quale è determinato dall'altre due. 161
218 *Corollario*. Per due rette, le quali non si tagliano, e non son paralelle tra loro, nè possono esser comprese in un medesimo piano, si posson sempre far passare due piani paralelli, la cui più corta distanza dà quella delle due rette proposte. *ivi*
219 *Osservazione*. La più corta distanza tralle rette dell'articolo precedente ha luogo sopra una retta, la quale è perpendicolare ad ambedue nel medesimo tempo. 162
220 *Teorema*. Due rette comprese tra due piani paralelli son sempre tagliate in parti proporzionali da un terzo piano paralello ai due primi. *ivi*
221 Allorchè più piani, i quali passano per un medesimo punto, s'incontrano due a due, lo spazio, ch'essi comprendon tra loro indefinito nel senso opposto al punto ove dessi s'incontrano, si chiama *angolo poliédro*, ovvero angolo a più facce. 163
L'angolo a tre facce si chiama angolo *triédro*, *ivi*
Il punto d'incontro di tutte le facce d'un angolo poliédro n'è il *vertice*. *ivi*
Le sezioni comuni delle facce sono le *costole*. *ivi*
In un angolo triédro vi son sei cose da considerarsi, cioè tre angoli piani, e tre angoli diédri. 163
222 *Teorema*. La somma di due qualunque degli angoli piani, i quali compongono un angolo triédro, è sempre maggiore del terzo. *ivi*
223 *Teorema*. Se due angoli triédri son formati dai medesimi angoli piani, gli angoli diédri compresi tra gli angoli piani eguali saranno eguali. 165
224 *Teorema*. Due angoli triédri formati da tre angoli piani eguali, e similmente disposti tra loro, sono eguali in tutte le loro parti. 167
225 *Osservazione*. Due angoli triédri composti dei medesimi angoli piani differentemente disposti, ovvero due angoli triedri *inversi* l'uno dell'altro, non posson coincidere, ma contengono il medesimo spazio. *ivi*
Nota sugli angoli triédri inversi. 168
226 *Teorema*. La somma degli angoli piani, i quali compongono un angolo poliédro convesso, vale a dire di cui tutte le costole son *salienti*, ovvero *esterne*, ma d'altronde in qualunque numero, è sempre minore di quattro retti. 169

Dei Corpi terminati da dei piani.

227 I Corpi terminati da dei piani si chiamano *poliédri*. 170

Non si può rinchiudere da qualunque parte uno spazio con un numero di piani minore di quattro, ed il Corpo, che ne resulta, si chiama tetraédro. *ivi*

Qualunque corpo, di cui una delle facce è un poligono qualunque, e di cui tutte le altre son dei triangoli aventi il loro vertice nel medesimo punto, si chiama *piramide*; il punto ove si riuniscon questi ultimi è il *vertice*, e la faccia opposta è la *base*. *ivi*

228 *Teorema* Se due tetraédri hanno ciascuno un angolo triedro composto di triangoli eguali, e similmente disposti, questi tetraédri sono eguali. ed essi lo saran pure se due facce dell'uno sono eguali, a due facce dell'altro, disposte nella maniera medesima, e formanti tra loro il medesimo angolo diédro che queste ultime. 171

229 I *poliédri simili* son quelli, le cui facce son nel medesimo numero, simili, similmente disposte, ed egualmente inclinate le une a riguardo dell'altre. *ivi*

230 *Teorema*. Allorchè i triangoli, che formau due angoli triedri omologhi di due tetraédri, son respettivamente simili, e similmente disposti, questi tetraédri son simili; ed i medesimi lo sono pure se due facce dell'uno fanno tra loro il medesimo angolo che due facce dell'altro, sono moltre simili a quest'ultime, e riunite con dei lati omologhi. 172

231. *Teorema*. Due piramidi qualunque son simili allorchè le loro facce son simili, e similmente disposte. 173

232 1.° *Corollario*. Tagliando una piramide con un piano paralello alla sua base, se ne taglia una piramide, la quale le è simile. 174

233 2. *Corollario*. Le costole omologhe delle piramidi simili son proporzionali tra loro, ed alle perpendicolari abbassate dai vertici sulla base. 175

234 *Osservazioni*. Si può trovare mediante ciò, che precede, l'altezza d'una piramide allorchè si conoscon le dimensioni d'un *tronco* a basi paralelle. *ivi*

235 *Teorema*. Le basi delle piramidi simili stanno tra loro come i quadrati di due costole omologhe qualunque, e come i quadrati delle perpendicolari abbassate dal vertice sul loro piano. 176

236 *Corollario*. Le sezioni fatte alla medesima distanza dai vertici in due piramidi qualunque sono in un rapporto costante, qualunque sieno d'altronde queste distanze, e le figure delle basi. *ivi*

237 I poliédri, i quali hanno due facce opposte eguali, e paralelle, e di cui tutte l'altre son de' paralellogrammi, si chiamano *prismi*. 177

I poligoni opposti son le *basi* del prisma. *ivi*

Ciascun angolo poliedro d'un prisma non è composto che di tre angoli piani. *ivi*

Quando le sue costole son perpendicolari sulla sua base, il prisma è *retto*; gli altri sono de' *prismi obliqui*. 178

238 Il prisma, la cui base è un paralellogrammo, si chiama *paralellepipedo*; le sue facce opposte sono eguali, e paralelle. 178

239 *Teorema*. Un poliédro compreso tra sei piani paralelli, due a due, è un paralellepipedo. *ivi*

240 *Teorema*. Se due prismi hanno ciascuno un angolo triédro composto di poligoni eguali, e similmente disposti, questi prismi saranno eguali 179

241 *Osservazioni*. Unendo con delle rette il vertice d'uno de' loro angoli con tutti gli altri, e dividendo tutte le loro facce in triangoli, si posson sempre dividere i polièdri qualunque in piramidi triangolari. *ivi*

Due corpi composti d'un medesimo numero di piramidi triangolari eguali, e similmente disposte sono eguali. 180

Un polièdro avente un numero N d'angoli è determinato da 3 N — 6 dati presi fra le distanze di questi angoli. *ivi*

242. *Teorema*. Due polièdri, i quali son composti d'un medesimo numero di piramidi simili, e similmente disposte, son simili. *ivi*

243 *Teorema*. Allorchè due polièdri son simili dessi possono esser decomposti in un medesimo numero di tetraèdri simili, e similmente disposti. 182

244 *Teorema*. Le costole omologhe de' polièdri simili sono proporzionali, come pure le diagonali delle facce omologhe, e le diagonali interne de' poliédri. 184

245 *Osservazione* sulla misura dell'area de' poliédri. *ivi*

246 *Teorema*. Le aree de' poliedri simili stanno tra loro come i quadrati delle costole omologhe. 185

Della misura de' Volumi.

247. Lo spazio contenuto dalla superficie d'un poliédro, ovvero occupato da questo corpo, è generalmente denotato sotto il nome di *volume*, o di *capacità* allorchè si tratta d'un corpo vuoto. 186

Nota sui motivi d'escludere la parola *solidità*. *ivi*

248 Due paralellepipedi costrutti sulla medesima base, e terminati superiormente dal medesimo piano paralello alla loro base sono equivalenti in volume. 187

249 *Corollario*. Un paralellepipedo qualunque può esser trasformato in un paralellepipedo rettangolo, avente una base equivalente a quella del primo, e la medesima *altezza*. 188

L'*altezza* d'un prisma, ovvero d'un paralellepipedo è la perpendicolare condotta tralle due basi; per una piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sulla faccia opposta, faccia la quale si chiama *base*. *ivi*

250 *Teorema*. Se si formi sulla base d'un prisma triangolare un paralellogrammo, e s'inalzi sopra questo paralellogrammo, preso per base, un paralellepipedo della medesima altezza del prisma triangolare, quest'ultimo sarà la metà dell'altro. *ivi*

Nota ove si dimostra l'eguaglianza de' volumi dei due prismi triangolari del n.° precedente, i quali benchè costrutti sulle medesime parti non posson coincidere. 190
251 *Corollario*. Due prismi triangolari della medesima base, e della medesima altezza sono equivalenti. *ivi*
252 *Teorèma*. Se si tagli un tetraèdro con dei piani paralelli alla sua base, ed equidistanti tra loro, potremo formare a ciascuno strato un prisma *esterno*, ed un prisma *interno*, di maniera che la somma de' primi differisca tanto poco quanto vorremo da quella de' secondi, ed in conseguenza pure dal tetraédro. *ivi*
253 *Teorema*. Due tetraédri della medesima base, e della medesima altezza sono equivalenti. 192
Nota. Altra dimostrazione della Proposizion precedente 193
254 *Teorema*. Un tetraédro è equivalente al terzo del prisma triangolare della medesima base, e della medesima altezza. *ivi*
255 *Teorema*. I paralellepipedi rettangoli della medesima base stanno tra loro come le loro altezze. 195
256 *Teorema*. Due paralellepipedi rettangoli qualunque stanno tra loro come i prodotti delle costole, le quali formano un medesimo angolo triédro. 196
257 *Osservazione*. La misura del volume d'un paralellepipedo rettangolo è il prodotto delle sue tre costole contigue, prendendo per termine di paragone il paralellepipedo, le cui tre costole contigue sono eguali alla linea scelta per unità. 197
258 1.° *Corollario*. Allorchè le costole sono eguali tra loro il paralellepipedo, il quale prende il nome di *cubo*, ha per misura la terza potenza della sua costola. 198
259 2.° *Corollario* Il volume d'un paralellepipedo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza. *ivi*
260 3.° *Corollario*. Il volume d'un prisma qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza. *ivi*
Due prismi qualunque stanno tra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze. 199
261 4.° *Corollario*. Il volume d'un tetraèdro ha per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza. *ivi*
262 5.° *Corollario*. Il volume d'una piramide qualunque ha per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza. 200
Due piramidi qualunque stanno tra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze. *ivi*
263 *Osservazione*. Il volume d'un tronco di piramide s'ottiene prendendo la differenza tra quello della piramide intera, e quello della piramide tolta. *ivi*
Il volume d'un poliédro qualunque può valutarsi decomponendo questo poliédro in piramidi, ovvero riducendolo a dei *prismi triangolari troncati*. *ivi*
264 *Teorema*. Un prisma triangolare troncato è equivalente a tre tetraédri della medesima base, aventi i loro vertici respettivi posti in ciascuno de' vertici degli angoli del triangolo opposto a questa base. 201

265 *Corollario*. Il volume d' un prisma triangolare troncato ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate su questa base da ciascuno degli angoli della base superiore. 202

266 *Teorema* Due poliedri simili stanno tra loro come i cubi delle loro costole omologhe. 203

Nota. I volumi di due tetraedri, i quali hanno un angolo triedro comune, stanno tra loro come i prodotti delle costole, le quali in ciascuno comprendon quest' angolo. *ivi*

SEZIONE SECONDA.

Dei Corpi rotondi.

267 I corpi rotondi son quelli, che son prodotti facendo girare una figura piana intorno a una linea retta. 205

Non si considerano negli Elementi di Geometria che il cono retto, il cilindro retto, e la sfera. *ivi*

Il *cono retto* si genera facendo girare un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati dell' angolo retto; l' ipotenusa descrive la superficie conica retta. *ivi*

Il lato, intorno del quale gira il triangolo generatore, si chiama l' *asse*. *ivi*

La *base* del cono è un Circolo. *ivi*

Qualunque sezione fatta da un piano paralello a questa base è parimente un Circolo *ivi*

Le Circonferenze di questi Circoli son proporzionali alle loro distanze dal vertice. *ivi*

Le loro aree stanno tra loro come i quadrati di queste distanze. *ivi*

Nota sul cono obliquo. 206

268 *Osservazione*. Allorchè si hanno le dimensioni d' un tronco di cono retto a basi paralelle si può, mediante ciò che precede, trovar l' altezza del cono intero. *ivi*

269 *Teorema*. Si posson sempre trovare due *piramidi regolari*, l' una iscritta, l' altra circoscritta al cono retto, tali che la differenza delle loro aree sia minore d' una grandezza data, per quanto piccola sia questa grandezza. 207

L' area d' una *piramide regolare*, allorchè non vi si comprende la sua base, ha per misura la metà del prodotto del contorno di questa base per la perpendicolare abbassata dal vertice sopra un de' suoi lati. *ivi*

270 *Corollario* L' area del cono è sempre minore di quella della piramide circoscritta, e maggiore di quella della piramide iscritta; ma ciascuna di queste ultime può approssimarsi alla prima tanto davvicino quanto vorremo. 209

271 *Teorema*. L' area d' un cono retto ha per misura la metà del prodotto della Circonferenza del Circolo, che gli serve di base, moltiplicata pel suo lato. *ivi*

Nota ove s' indica un altro giro di dimostrazione per la Proposizione suddivisata, e per le sue analoghe. 210

272 *Teorema*. L' area d' un tronco di cono retto a basi paralelle, ovvero del *cono troncato*, ha per misura la

metà del prodotto della somma delle Circonferenze delle sue due basi pel suo lato, ovvero il prodotto di questo lato per la Circonferenza della sezione fatta ad egual distanza dalle basi. 270

N. B. Sostituendo il vertice alla base superiore, queste misure convengono al cono intero. 212

273 *Teorema* Si posson sempre trovar, due piramidi, l'una iscritta, l'altra circoscritta ad un cono retto, tali che la differenza de'loro volumi sia minore d'una grandezza data, per quanto piccola sia questa grandezza. *ivi*

274 *Corollario* Si posson sempre assegnare una piramide iscritta, ed una piramide circoscritta, le quali differiscan tanto poco quanto vorremo dal cono, l'una essendo minore, e l'altra maggiore. 213

275 *Teorema*. Il volume d'un cono ha per misura il terzo del prodotto dell'area della sua base per la sua altezza.

Nota sul cono obliquo. *ivi*

276 *Problema*. Trovare il volume d'un tronco di cono a basi paralelle. *ivi*

277 Un rettangolo, il quale gira intorno ad un de'suoi lati, genera il corpo chiamato *cilindro retto*. 214

Le basi d'un cilindro retto son due Circoli eguali, e paralelli, come pure tutte le sezioni paralelle a queste basi. *ivi*

Il lato, intorno del quale gira il rettangolo generatore, si chiama l'*asse*. *ivi*

Nota sul cilindro obliquo. *ivi*

278 *Teorema*. Si possono iscrivere, e circoscrivere ad un cilindro retto due prismi retti tali che la differenza delle loro aree sia minore d'una grandezza data, per quanto piccola sia questa grandezza. 215

279 *Corollario*. Si può sempre trovare un prisma tanto iscritto quanto circoscritto, la cui area differisca tanto poco quanto vorremo dall'area del Cilindro retto, maggior della prima, e minore della seconda. 216

280 *Teorema*. L'area della superficie convessa del Cilindro retto ha per misura il prodotto della Circonferenza della sua base per la sua altezza. 217

281 *Teorema*. Si posson sempre formare due prismi, l'uno iscritto, l'altro circoscritto al cilindro, tali che i loro volumi differiscano tanto poco quanto vorremo. *ivi*

282 *Corollario*. Si possono costruire un prisma iscritto, ed un prisma circoscritto, tali che i loro volumi differiscan tanto poco quanto vorremo da quel del cilindro, il quale sarà sempre maggiore del primo, e minor del secondo. *ivi*

283 *Teorema*. Il volume d'un cilindro retto ha per misura il prodotto dell'area della sua base per la sua altezza. 218

Nota sul cilindro obliquo. *ivi*

284 Un semi-circolo girando intorno al suo diametro, genera la *sfera*; e la semi-circonferenza, che l'inviluppa, descrive la superficie sferica. *ivi*

Il diametro, intorno al quale gira il semi circolo generatore, è l'*asse*; e le sue estremità sono i *poli*. *ivi*

La superficie sferica ha tutti i suoi punti egualmente lontani dal centro del Circolo generatore. *ivi*

285 *Teorema*. La sezione della sfera con un piano qualunque è sempre un Circolo. 219

286 *Osservazione*. I Circoli, il cui piano passa pel centro della sfera, son de' *Circoli grandi*; gli altri son de' *Circoli piccoli*. *ivi*

Tutti i Circoli grandi sono eguali tra loro. *ivi*

287 *Corollario*. Due Circoli grandi si taglian sempre in due parti eguali. *ivi*

288 Tre Circoli tagliandosi due a due sulla superficie della sfera, formano un *triangolo sferico*; non si considerano negli *Elementi* che quelli, che son formati da tre archi di Circoli grandi. 220

289 *Teorema*. La somma di due lati qualunque d'un triangolo sferico è sempre maggiore del terzo. *ivi*

290 1.° *Corollario*. Il più corto cammino. per andare da un punto ad un altro sulla superficie sferica, è l'arco di Circolo grande determinato dal piano, il quale passa per questi due punti, e pel centro della sfera. *ivi*

291 2.° *Corollario*. La somma de' tre lati d'un triangolo sferico è minore della Circonferenza d'un Circolo grande. 221

292 *Teorema*. Se pel centro d'un Circolo qualunque descritto sulla sfera s'inalzi una perpendicolare, essa passerà pel centro della sfera, e la taglierà in due punti, ciascuno de' quali sarà egualmente lontano da tutti quelli della Circonferenza del Circolo proposto. 222

293 *Corollario*. Ciascuno di questi punti, i quali si chiamano *poli*, può servire a descrivere questo Circolo. 223

La retta, che gli unisce, è l'*asse* del medesimo Circolo. *ivi*

294 *Teorema*. Il piano condotto per un punto della superficie della sfera perpendicolarmente al raggio, il quale passa per questo punto, è tangente della sfera; e reciprocamente, il piano tangente in un punto qualunque della superficie sferica è perpendicolare all'estremità del raggio. *ivi*

295 *Teorema*. Due porzioni corrispondenti di poligoni regolari, l'uno iscritto, l'altro circoscitto al Circolo generator della sfera, descrivono, girando intorno al diametro di questo Circolo, due corpi, le cui aree possono differir meno di qualunque grandezza data. 224

L'area di ciascuno di questi corpi ha per misura il prodotto della sua altezza per la Circonferenza del Circolo iscritto nel poligono, il quale lo genera. 225

296 *Corollario*. L'area del corpo iscritto è minore di quella della porzione corrispondente di sfera, e l'area del corpo circoscritto è maggiore; ma si posson sempre trovare due di questi corpi, la cui area differisca tanto poco quanto vorremo da quella della porzione di sfera. 227

297 *Teorema*. L'area della *callotta sferica* è eguale alla sua altezza moltiplicata per la Circonferenza d'un Circolo grande. *ivi*

298. 1.° *Corollario*. L'area della sfera intera è eguale al suo diametro moltiplicato per la Circonferenza d'un

Circolo grande ; e quella d' una zona qualunque è eguale al prodotto dell' altezza di questa zona per la Circonferenze d' un Circolo grande .

299 2.° *Corollario*. L'area della superficie sferica è quadrupla d' uno de' suoi Circoli grandi . 227

300 *Teorema* . L' area dal *fuso sferico* sta a quella della sfera come l'angolo piano , il quale misura l'angolo diédro , che formano i piani , che determinan questo fuso , sta a quattro retti . 228

301 *Teorema* L' area d' un triangolo sferico sta a quella della sfera intera come la differenza tra la somma de' tre angoli diédri formati da' piani de' Circoli , i quali compongono questo triangolo , e due angoli retti sta ad otto angoli retti . 229

Nota ove si dimostra , per la Proposizion precedente, che due triangoli sferici , i quali hanno i loro lati respettivamente eguali , ma disposti in ordine inverso , sono equivalenti . 230 *ivi*

302 *Teorema* . La differenza tra i volumi de' corpi generati da due porzioni corrispondenti di poligon regolari , l'uno iscritto , e l'altro circoscritto ad un areo di Circolo nella rivoluzion di quest' arco intorno al suo asse , e chiusi dalla superficie conica descritta nelle medesime circostanze dal raggio, che termina le due porzioni di poligono , può divenir tanto piccola quanto vorremo . 233

Il volume di ciascuno di questi corpi ha per misura la somma dell' aree descritte dai lati del poligono generatore , moltiplicata pel terzo del raggio del Circolo iscritto in questo poligono . 234

303 *Corollario* . Il *settore sferico* , generato dalla rivoluzione del settor circolare , è minore del corpo circoscritto , e maggior dell' iscritto ; ma la sua differenza coll' uno , o coll' altro di questi corpi può esser resa tanto piccola quanto vorremo . 236

304. *Teorema* . Il volume d' un settore sferico è eguale all'area della callotta , sulla quale esso si appoggia , moltiplicata pel terzo del raggio . *ivi*

305 1.° *Corollario* . Il volume della sfera è eguale alla sua area moltiplicata pel terzo del raggio , ovvero all' area del suo Circolo grande moltiplicata pei due terzi del diametro *ivi*

306 2.° *Corollario* . La misura del settore sferico , allorchè desso sorpassa l'emisfero , è pure la stessa che nel n.° 303. 237

307 3.° *Corollario* . Il volume della porzione di sfera generato dal semi-segmento circolare , e che si chiama *segmento sferico* , s' otterrà togliendo dal volume del settore sferico quello del cono corrispondente . *ivi*

Il volume della zona s' otterrà considerandola come la differenza de' due segmenti formati nella sfera dai piani , i quali terminan questa zona . *ivi*

Del paragone de' Corpi rotondi.

308 I Corpi rotondi simili son quelli, i quali son generati da delle Figure simili. 238

Nei coni simili i lati, le altezze, i raggj delle basi, le loro Circonferenze sono proporzionali, e le aree delle basi stanno come i quadrati delle loro linee omologhe; la medesima cosa ha luogo riguardo da' cilindri simili. *ivi*

Le sfere sono de' corpi simili *ivi*

309 *Teorema*. Le aree de' coni simili stanno come i quadrati de' lati di questi coni, ed i loro volumi come i cubi di questi medesimi lati. *ivi*

310 *Teorema*. Le aree de' cilindri simili stanno come i quadrati de' lati di questi cilindri, ed i loro volumi come i cubi di questi medesimi lati. 239

311 *Teorema*. L' aree di due sfere stanno come i quadrati de' loro raggj, ovvero de' loro diametri, ed i loro volumi come i cubi di queste medesime linee. *ivi*

312 *Osservazione*. L' area convessa del cilindro circoscritto alla sfera è eguale a quella di questa sfera, ed il volume di quest' ultimo corpo non è che i due terzi di quello del primo. 240

313 *Conclusione*, nella quale dimostrasi che non si possono avere più di cinque specie di poliédri regolari, e che le facce di questi poliedri non posson essere che de' triangoli equilateri, de' quadrati, o de' pentagoni. 241

Fine della Tavola.

SUPPLEMENTO

Al Trattato elementare d'Aritmetica, *necessario per passare immediatamente da questo Trattato agli* Elementi di Geometrìa.

1. Per compendiare il discorso, si esprimono con dei segni particolari le parole, le quali ripetonsi più di frequente; e quando ci occupiamo d' un numero, ovvero d'una grandezza qualunque senza considerare il suo valore particolare, ma solamente per indicar le sue relazioni con dell' altre grandezze, ovvero le operazioni, alle quali essa debb'essere sottomessa, si distingue questa con una lettera dell' alfabeto, la quale diviene allora il nome compendiato di essa grandezza.

$+$ *significa* più, *ovvero* aggiunto con

L' espressione $A + B$ indica la somma, la quale resulta dalla grandezza rappresentata dalla lettera A sommata con quella rappresentata da B, ovvero A *più* B.

$-$ *significa* meno.

$A - B$ indica ciò, che resta quando si toglie dalla grandezza rappresentata da A quella rappresentata da B, ovvero A *meno* B.

$\times$ *significa* moltiplicato *per*.

$A \times B$ indica il prodotto della grandezza rappresentata da A moltiplicata per quella rappresentata da B, ovvero A *moltiplicata per* B.

$\frac{A}{B}$ indica il quoziente della grandezza rappresentata da A divisa per quella rappresentata da B, ovvero A *divisa per* B.

$A = B$ *significa* che la grandezza rappresentata da A è eguale a quella rappresentata da B, ovvero A *eguale* a B.

$A > B$ *significa* che la grandezza rappresentata da A sorpassa quella rappresentata da B, ovvero A *maggiore di* B.

$A < B$ *significa* A *minore di* B.

2A, 3 A, ec. indicano il *doppio*, il *triplo*, ec. della grandezza rappresentata da A.

II. Allorchè si moltiplica un numero per se stesso, si forma la sua *seconda potenza*, ovvero il *suo quadrato*: 5×5, ovvero 25 è la seconda potenza di 5, ossia il quadrato di 5.

La seconda potenza è dunque il prodotto di due fattori eguali; ciascun di questi fattori è la *radice quadrata* del prodotto: 5 è la radice quadrata di 25.

Se si moltiplichi la seconda potenza per la sua radice, si ha la *terza potenza*, ovvero il *cubo*: 5×25, ovvero 125 è la terza potenza di 5.

La terza potenza è un prodotto formato dalla moltiplicazione di tre fattori eguali; ciascun di questi fattori è la *radice cubica* di questo prodotto: 125 è il prodotto di 5 moltiplicato due volte per se stesso, ovvero $5 \times 5 \times 5$; e 5 è la radice cubica di 125.

In generale A^2 essendo il compendio di $A \times A$, indica la seconda potenza, ovvero il quadrato di A.

$\sqrt{A}$ indica la radice quadrata di A, ovvero il numero, il quale moltiplicato per se stesso produrrebbe il numero rappresentato da A.

A^3 essendo il compendio di $A \times A \times A$, indica la terza potenza, ovvero il cubo di A.

$\sqrt[3]{A}$ indica la radice cubica di A, ovvero il numero, il quale moltiplicato due volte per se stesso produrrebbe il numero A.

Tutti i numeri non son de' quadrati, o de' cubi perfetti, vale a dire, non hanno radici quadrate, o cubiche, che si possano esprimere esattamente: 19, per esempio, trovandosi tra 16, ch' è il quadrato di 4, e 25, ch' è il quadrato di 5, ha per radice un numero compreso tra 4, e 5, ma che non si potrebbe assegnare esattamente, neppur col soccorso delle frazioni: questo è un numero *incommensurabile*.

Parimente 89 trovandosi tra 64, ch' è il cubo di 4, e 125, ch' è quello di 5, ha per radice cubica un nu-

mero compreso tra 4, e 5, ma che neppur questo potrebbesi assegnare esattamente. Troveremo negli *Elementi d'Algebra* de' metodi per approssimarsi tanto davvicino quanto vorremo alle radici quadrate, ed alle radici cubiche de' numeri, i quali non son de' quadrati, o de' cubi perfetti.

(I tre articoli seguenti debbon essere studiati prima del n.° 58.)

III. 1.° Allorchè due proporzioni hanno un rapporto comune, è manifesto che si posson mettere in proporzione gli altri due rapporti, perchè dessi sono eguali a quello, che loro è comune.

Se si ha

$$A : B :: C : D,$$
$$E : F :: C : D,$$

ne resulterà necessariamente

$$A : B :: E : F.$$

2.° Allorchè due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, si posson mettere i conseguenti in proporzione, perchè, se si ha

$$A : B :: C : D,$$
$$A : E :: C : F,$$

cangiando i medj di posto, queste proporzioni diverranno

$$A : C :: B : D$$
$$A : C :: E : F,$$

e ne concluderemo

$$B : D :: E : F;$$

ciò, che riducesi a $B : E :: D : F$.

IV. Si posson fare ancora nelle proporzioni altri cangiamenti quante son le trasposizioni de' termini, le quali non turbino l'eguaglianza del prodotto degli estremi a quello de' medj.

1.° Se al conseguente d'un rapporto si aggiunga il suo antecedente, e si paragoni questa somma coll'antecedente, quest'ultimo vi sarà contenuto una volta di più di quel che non lo era nel primo con-

seguente ; il nuovo rapporto sarà dunque eguale al rapporto primitivo aumentato dell' unità. Se si faccia la medesima operazione sopra i due rapporti d'una proporzione, ne resulteranno evidentemente due nuovi rapporti eguali tra loro, ed in conseguenza una nuova proporzione.

Sia, per esempio, la proporzione

$$4 : 6 :: 12 : 18,$$

avremo

$$6 + 4 : 4 :: 18 + 12 : 12,$$

ovvero

$$10 : 4 :: 30 : 12.$$

2°. Se dal conseguente d' un rapporto si tolga l'antecedente, e si paragoni questa differenza coll' antecedente, quest' ultimo vi sarà contenuto una volta di meno che nel primo conseguente : il nuovo rapporto sarà dunque eguale al rapporto primitivo diminuito dell' unità. Se si faccia la medesima operazione sui due rapporti d'una proporzione, ne resulteranno due nuovi rapporti eguali tra loro, ed in conseguenza una nuova proporzione.

Dalla proporzione

$$4 : 6 :: 12 : 18,$$

ne dedurremo

$$6 - 4 : 4 :: 18 - 12 : 12,$$

ovvero

$$2 : 4 :: 6 : 12.$$

Per una proporzione tra delle grandezze qualunque denotate da delle lettere

$$A : B :: C : D$$

avremo, mediante i cangiamenti suddivisati,

$$B + A : A :: D + C : C,$$
$$B - A : A :: D - C : C.$$

Se si cangino i medj di posto in quest'ultime, otterremo

$$B + A : D + C :: A : C,$$
$$B - A : D - C :: A : C;$$

ma in virtù del medesimo cangiamento la proporzione

$$A : B :: C : D$$

somministra pure

$$A : C :: B : D ;$$

e poichè i rapporti A : C, B : D son eguali, ne concluderemo

$$B + A : D + C :: A : C, \text{ovvero} :: B : D,$$
$$B - A : D - C :: A : C, \text{ovvero} :: B : D;$$

resultato, il quale si enuncia nel modo seguente

In una proporzione qualunque la somma, o la differenza de' due primi termini sta alla somma, o alla differenza de' due ultimi come il primo sta al terzo, o come il secondo sta al quarto.

Di più, i due rapporti A : C, ovvero B : D essendo comuni alle due ultime proporzioni quì sopra, ne resulta che gli altri rapporti delle proporzioni medesime sono eguali, e che in conseguenza

$$B + A : D + C :: B - A : D - C,$$

ovvero, cangiando i medj di posto,

$$B + A : B - A :: D + C : D - C,$$

vale a dire, che *la somma de' due primi termini d'una proporzione sta alla lor differenza come la somma de' due ultimi sta alla lor differenza.*

Per esempio,

$$6 + 4 : 6 - 4 :: 18 + 12 : 18 - 12,$$

ovvero

$$10 : 2 :: 30 : 6.$$

Allorchè la proporzione

$$A : B :: C : D$$

si cangia in

$$A : C :: B : D,$$

A, e B sono gli antecendenti, C, le D i conseguenti, e le proporzioni

$$B+A : D+C :: A : C, \text{ovvero} :: B : D,$$
$$B-A :: D-C :: A : C, \text{ ovvero} :: B : D$$

corrispondono all'enunciato seguente

La somma, o la differenza degli antecedenti d' una proporzione sta alla somma, o alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.

Se ne deduce *la somma degli antecedenti sta alla lor differenza come la somma de' conseguenti sta alla lor differenza.*

Se si abbia una serie di rapporti eguali

$$A : B :: C : D :: E : F,$$

non considerando in primo luogo che i due primi, i quali forman la proporzione

$$A : B :: C : D,$$

se ne deduce da ciò, che precede,

$$A+C : B+D :: A : B;$$

e poichè il terzo rapporto E : F è eguale al primo A : B, avremo

$$A+C : B+D :: E : F.$$

Se si prenda la somma degli antecedenti, e quella de' conseguenti in quest' ultima proporzione, ne resulterà

$$A+C+E : B+D+F :: E : F, \text{ovvero} :: A : B.$$

Seguendo l' andamento medesimo, qualunque fosse il numero de' rapporti eguali, avrebbesi in ultimo luogo, *la somma d' un numero qualunque d' antecedenti sta alla somma de' lor conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

V. Allorchè si hanno due proporzioni qualunque

$$A : B :: C : D$$
$$E : F :: G : H,$$

e si moltiplichino *per ordine*, vale a dire, termine, a termine, i prodotti formano una proporzione, dove si ha

$$A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H.$$

Ciò è manifesto, poichè i nuovi rapporti $\frac{B \times F}{A \times E}$, $\frac{D \times H}{C \times G}$ saranno respettivamente i prodotti de' rapporti primitivi

$$\frac{B}{A} \text{ e } \frac{F}{E}, \quad \frac{D}{C} \text{ e } \frac{H}{G},$$

i quali sono eguali.

Se si moltiplichi la proporzione

$$A : B :: C : D$$

per

$$A : B :: C : D,$$

avremo (II)

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2;$$

dal che ne segue che *i quadrati di quattro quantità in proporzone formano una nuova proporzione.*

Moltiplicando per ordine

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$$

per

$$A : B :: C : D,$$

avremo

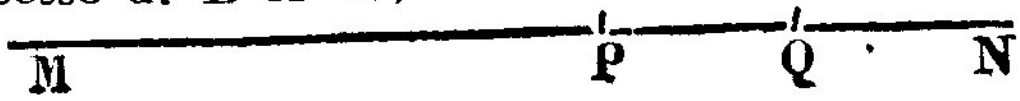
$$A^3 : B^3 :: C^3 : D^3,$$

vale a dire, che *i cubi di quattro quantità in proporzione formano una nuova proporzione.*

(*I due articoli seguenti si riportano al n.° 76.*)

VI. Si considerano spesso delle grandezze decomposte in più parti, e si ha bisogno di sommarle, di sottrarle, o di moltiplicarle in questo stato, vale a dire, di determinare come i resultati di queste operazioni siano formati colle parti delle grandezze proposte. Ecco alcune regole su questo soggetto.

1.° È manifesto che, se si voglia sommar la grandezza $B - C$ con la grandezza A, fa di mestieri scrivere $A + B - C$; poichè non è nè B, nè C, che ci proponghiamo di sommare con A, ma solamente l'eccesso di B su C;



d'altronde, se si prendan le rette MP, PN, e QN per rappresentar le grandezze A, B, e C, vedremo che

$$PQ = PN - QN,$$
$$MP + PQ = MP + PN - QN.$$

2.° Se dalla grandezza A si volesse togliere la grandezza B — C, bisognérebbe scrivere A + C — B, ovvero, ch' è la stessa cosa, A — B + C.

Infatti, la differenza di due grandezze non cangia allorchè si aggiunge a ciascuna la stessa grandezza; ora, se aggiungasi C a B — C, conseguiremo B; facendo la medesima addizione alla grandezza A, si ottiene A + C, e la sottrazione di B dà allora A + C — B.

La Figura di sopra conferma questo medesimo resultato; poichè, se si prendan le rette MN, PN, PQ per le grandezze A, B, C, si ha

$$QN = PN - PQ,$$
$$MN - QN = MQ = MP + PQ;$$

e poichè MP = MN — PN, conseguiremo

$$MP + PQ = MN - PN + PQ;$$

resultato, il quale corrisponde ad A — B + C

3.° Il prodotto della grandezza A per la grandezza B + C è espresso da A × B + A × C; poichè detto prodotto dee contener tante volte il numero A quante unità vi sono nella somma de' numeri B, e C, e dee in conseguenza esser composto di A preso tante volte quante unità vi sono in B, più, di A preso tanto volte quante unità vi sono in C; il che si scrive A × B + A × C.

4.° Il prodotto di A per B — C è espresso da A × B — A × C; poichè, se si rappresenti B — C per D, avremo evidentemente B = D + C, ed in conseguenza A × B = A × D + A × C; concluderemo da ciò che A × D = A × B — A × C; il che forma la Proposizione avanzata quì sopra, perchè D = B — C.

VII. Segue da ciò, che precede, che *il quadrato d'un numero composto di due parti contiene il quadrato della prima, due volte il prodotto della prima per la seconda, ed il quadrato della seconda.* Il numero 13, per esempio, essendo considerato come eguale a 9+4, il suo quadrato 169 è composto

del quadrato di 9, ovvero 81
di 2 volte 9×4, ovvero 72
e del quadrato di 4, ovvero 16

TOTALE.....169.

Per dimostrar l'enunciato in generale, serve osservare che il prodotto di A per B+C essendo A×B +A×C, se si faccia A=B+C, i prodotti parziali A×B, ed A×C diverranno B×B+B×C, e B×C C×C; riunendoli, otterremo il resultato

$$B\times B+B\times C+B\times C+C\times C,$$

il quale può scriversi come segue

$$B^2+2B\times C+C^2;$$

ciò, che dà il quadrato di B+C conforme all'enunciato di sopra.

Si trova in una maniera simile che *il quadrato della differenza di due grandezze è composto del quadrato della prima, meno due volte il prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda.* Il numero 9 essendo eguale a 13−4, per esempio, il suo quadrato 81 sarà formato di 169−2 volte 4×13 +16; ciò, ch'è facile di verificare.

La dimostrazion generale della Proposizione suddivisata si forma facendo A=B−C nel prodotto di A per la differenza B−C; poichè questo prodotto essendo espresso da A×B−A×C, se si scriva primieramente B−C in luogo di A nei prodotti A×B, ed A×C, essi diventerranno respettivamente

$$B\times B-B\times C, \text{ e } B\times C-C\times C;$$

e, per togliere il secondo dal primo, bisognerà, dietro all'articolo VI., scrivere

$$B\times A-B\times C-B\times C+C\times C:$$

ciò, che riducesi a

$$B^2 - 2B \times C + C^2,$$

e somministra il quadrato di B — C conformemente all'enunciato di sopra.

Le nozioni, che precedono, son sufficienti per intendere le Proposizioni necessarie della Geometria; poichè si può nel n.° 141 limitarsi alla soluzione grafica, e tralasciare i num.i 150, 156, 157, che non servono che a calcolare il rapporto della Circonferenza al diametro, il quale può ottenersi facilmente nella Trigonometria mediante i seni, e le tangenti de' piccoli archi.

(*Gli articoli seguenti, i quali riguardano la valutazione delle aree, e de' volumi, ovvero in altri termini*, la misurazione delle superficie, e dei solidi, *si riportano alla fine della prima Parte, ed a quella della seconda*)

VIII. Il ravvicinamento dell' espressioni, o *formule*, dietro alle quali si calcolano le aree

del Paralellogrammo, n.° 170,
del Triangolo, n.° 171,
del Trapezio, n.° 175,
del Circolo, n.° 187,
finalmente del Settor circolare, n.° 189,

dimostra che la determinazione di tutte queste aree non dipende che da un prodotto di due fattori, i quali si posson sempre riguardare come la base, e l'altezza, vale a dire, come *le due dimensioni* d'un Rettangolo equivalente all'area cercata. Quando questi fattori sono espressi in misure decimali, la lor moltiplicazione s'effettua secondo il solito; ma la denominazione dell' *unità* del resultato richiede alcune attenzoni.

Sia, per esempio, un rettangolo di 49^{mi}, 54 di base sopra 15^{mi}, 27 d'altezza; moltiplicando questi due numeri, si trova 756, 4758. L'unità di questo numero è il quadrato, che ha un metro di lato, e che per questa ragione chiamasi il *metro quadro*; le frazioni decimali ne son sempre la decima, la centesima, la millesima, ec. parte: la misura suddivisata potrebbe enunciarsi così 756 metri quadri, e 4758 diecimillesimi di metro quadro; ma il più spesso si fan cor-

rispondere le suddivisioni del metro quadro a quelle del metro lineare; ed allora si dee osservare che

Il metro quadro contiene cento quadrati d'un decimetro di lato, ovvero cento *decimetri quadri*;

Il decimetro quadro contiene cento quadrati d'un centimetro di lato, ovvero cento *centimetri quadri*; e così di seguito.

Sono dunque i centesimi di metro quadro, i quali esprimono i decimetri quadri; i diecimillesimi, i quali esprimono i centimetri quadri; i millionesimi, i quali esprimono i millimetri quadri. Dietro a ciò, il numero 756, 4758 s' enuncia
756 metri quadri, 47 decimetri quadri, 58 centimetri quadri.

Si deduce da ciò che non è permesso confondere il decimo di metro quadro col decimetro quadro. La prima di queste suddivisioni non potrebbe rappresentarsi da un quadrato, le cui dimensioni sien de' numeri esatti; poichè l'unità non ne contien che 10, e dieci non è un quadrato perfetto.

Si può riportare comodamente il decimo di metro quadro ad un rettangolo d'un metro di base sopra un decimetro d'altezza: è lo stesso a riguardo delle frazioni decimali, che seguono, e che denotano isolatamente de' rettangoli d' un metro di base sopra un centimetro, millimetro, ec. d'altezza.

Non è che separando le cifre di due in due, a partir dalla virgola, che si può enunciare il numero in misure quadre.

Quando le cifre decimali sono in numero impari, fa di mestieri scrivere uno *zero* alla destra affinchè l' ultimo ordine di decimali sia riportato a delle misure quadre.

Il rettangolo, che ha 27^{mi} di base sopra $4^{mi},3$ d'altezza, per esempio, ha per misura in metri quadri 116,1. Ponendo uno *zero* alla destra di questo numero, desso diviene 116,10, e si enuncia 116 metri quadri, e 10 decimetri quadri.

Ciò, che ho detto, si applica egualmente ai diversi ordini d'unità posti alla sinistra della virgola; ed osservando che l'*ara*, essendo un quadrato di 10 metri di lato, contiene 100 metri quadri, che *l'ecatàra* contien cento are, il numero 37549 metri quadri, per

esempio, si decompone in 3 ecatare, 75 are, e 49 metri quadri, o *centiàre*.

È a proposito di stabilire il senso di più espressioni, le quali qualche volta confondonsi. Che si dica un metro quadro, ovvero un metro in quadrato, ciò riducesi allo stesso, poichè non vi può esser questione nei due casi che d'un quadrato avente un metro per lato; ma bisogna accuratamente distinguere, per esempio, gli spazj di 10 *metri quadri*, e di 10 *metri in quadrato*; perchè l'uno indica un'area equivalente a 10 quadrati d'un metro di lato, e l'altro un sol quadrato avente 10 metri di lato, e che comprende in conseguenza 100 metri quadri.

L'uso delle misure decimali semplicizza considerabilmente i calcoli della misura pratica dell'estensione. Con le antiche misure il primo mezzo, che si presenta, è quello di convertire ciascun dei fattori nelle suddivisioni della più piccola specie, la quale sia contenuta in uno di essi affinchè il resultato sia espresso in misure quadrate aventi questa suddivisione per lato. Se vi sien, per esempio, delle linee in un dei fattori, bisogna ridurli ambedue in linee; il prodotto sarà composto di linee quadre. Per risalire a delle misure maggiori, osserveremo che

il pollice quadro equiv. a	12 × 12, ovv.	144 linee quadre;
il piede quadro	12 × 12, ovv.	144 pollici quadri;
la tesa quadra	6 × 6, ovv.	36 piedi quadri;

e dividendo successivamente per questi numeri, tradurremo il resultato in tese quadre, piedi, e pollici quadri.

Poco si usava di questo mezzo, perchè conduce ad operare su dei numeri troppo grandi; ma si faceva uso del metodo, che serve ad effettuar la moltiplicazione de' numeri complessi. Che sieno, per esempio, le due dimensioni da moltiplicarsi

$$49^{tese}\ 5^{pi}\ 7^{po}, \text{ e } 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}:$$

se si scelga il primo per moltiplicando, concepiremo primieramente un rettangolo avente $49^{tese}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ di base sopra una tesa d'altezza, e che starà in conseguenza a quello, del quale cercasi la misura, come $1^{t} : 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$ (166). Sarà permesso in conseguenza di

riguardare il moltiplicatore $32^t\ 4^{pi}\ 5^{po}$ come un numero astratto: ora, un rettangolo di $49^t\ 5^{pi}\ 7^{po}$ di base sopra una tesa d'altezza si decompone nei seguenti

1.° Un rettangolo di 49^{tese} di base sopra una tesa d'altezza, e continente 49^{tese} quadre;

2.° 5 rettangoli aventi ciascuno un piede di base sopra una tesa d'altezza: questi rettangoli si chiamano *tese-piedi*; egli è manifesto che ve ne voglion 6 per formare la tesa quadra;

3.° 7 rettangoli d'un pollice di base sopra una tesa d'altezza; questi rettangoli si chiamano *tese-pollici*; ne bisognano evidentemente 12 per formare la tesa-piede.

Proseguendo in tal maniera arriverebbesi, se vi fosse luogo, alle *tese-linee*, e alle *tese-punti*, le quali avrebber tra loro, e colla tesa quadra i medesimi rapporti delle suddivisioni lineari, che a loro servon di base. I compendj per iscrivere queste misure, cominciando dalla tesa quadra, sono

$$t.t.,\ t.pi,\ t.po,\ t.l,\ t.pt.$$

Ciò premesso, l'impiego delle parti aliquote, conformemente alle regole esposte sul fine del *Trattato Elementare d'Aritmetica*, somministra l'operazione seguente

	$49^{t.t}$	$5^{t.pi}$	$7^{t.po}$			
	32^t	4^p	5^p.			
	98					
	147					
Per $3^{t.pi}$	16					
$1^{t.pi}$	5	2				
$1^{t.pi}$	5	2				
Per $6^{t.po}$	2	4				
$1^{t.po}$		2	8			
Per 3^{pi}	24	5	9	$6^{t.l}$		
1^{pi}	8	1	11	2		
Per 4^{po}	2	4	7	8	$8^{t.pt.}$	
1^{po}		4	1	11	2	
Prodotto totale	$163_4^{t.t}$	$3^{t.pi}$	$2^{t.po}$	$3^{t.l}$	$10^{t.pt.}$	

Eccetto la prima parte di questo resultamento, la quale è in tese quadre, le altre son dei rettangoli; ma la loro conversione in piedi quadri, pollici quadri, ec. è facile; poichè

la tesa-piede equiv. a $6^{pi} \times 1^{pi}$, ovvero a 6 piedi quadri

la tesa-pollice $\frac{1^{t.pi}}{12}$, ovv. $\frac{1}{2}^{pi}$ quad., ovv. 72^{po} quad.;

la tesa-linea $\frac{1^{t.po}}{12}$, ovv. 6 pollici quadri;

la tesa-punto $\frac{1^{t.l}}{12}$, ovv. $\frac{1}{2}^{po}$ quad., ovv. 72 l. quad.

Moltiplicando dunque respettivamente per 6, $\frac{1}{2}$, 6, $\frac{1}{2}$ le tese-piedi, tese-pollici, tese-linee, e tese-punti del prodotto quì sopra ottenuto, si trovano $163\frac{1}{4}$ tese quadre, 19 piedi quadri, e 23 pollici quadri.

La tesa-quadra, e le sue parti non servivano che alla misura delle piccole aree; i campi si valutavano in *pertiche*, ed in *arpenti*: quest'ultime misure han variato secondo i tempi, e secondo i luoghi. Si trovano nelle *Tavole* dell' Aritmetica due sorte d'arpenti parogonati con le nuove misure agrarie, cioè l'*arpento dell'Acque, e Foreste*, e l'*arpento di Parigi*. L'uno, e l'altro eran composti di 100 pertiche; la pertica, che avrebbe dovuto chiamarsi *pertica quadra*, era un quadrato, il quale rispetto agli arpenti dell'Acque, e Foreste aveva 22 piedi di lato, e solamente 18 in quello di Parigi. Il rapporto delle pertiche, lo stesso che quello de' due arpenti, è quello de' quadrati de' numeri 22, e 18, vale a dire di 484 a 324, il quale presso a poco riducesi al rapporto di 3 a 2.

La pertica di Parigi avendo 18 piedi, ovvero 3 tese di lato, conteneva 9 tese quadrate; e l'arpento del medesimo luogo contenendo esattamente 900 tese quadre, era più comodo dell'altro; ma tutte queste misure son di gran lunga inferiori alle misure decimali, nelle quali esse facilmente trasformansi col mezzo delle *Tavole* precitate: e d'altronde, convertendo in metri, e parti decimali di metro le dimensioni della misura proposta, il loro prodotto somministrerebbe il rapporto di questa misura col metro quadro.

Non si tien proposito in questi Elementi che delle Figure terminate da linee rette, o da Circonferenze di Circolo; ma le formule citate nel principio di quest'articolo servono pure nella maggior parte de' casi della Pratica alla riquadratura dell'aree circoscritte da linee curve, perchè, dividendo queste linee curve in piccole porzioni sensibilmente rette, si riduce la Figura proposta ad un Poligono rettilineo.

IX. L'espressioni de' volumi del Prisma, n.° 260,
della Piramide . . . . . , n.° 262,
del Prisma triangolare troncato, n.° 265,
del Cono . . . . . , n.° 275,
del Cilindro . . . . . , n.° 283,
e della Sfera. . . . . , n.° 304 — 306

essendo tutte composte del prodotto d'un' area moltiplicata per un' altezza, dipendon necessariamente da un prodotto di tre fattori, poichè l' area ne contien due; e questo prodotto riducesi all' espressione d'un paralellepipedo rettangolo (257) equivalente al Corpo proposto E' in questo senso che dicesi che un volume qualunque è il prodotto di 3 *dimensioni*. La loro moltiplicazione si fa coi soliti metodi ordinarj quando i tre fattori sono espressi in misure decimali; ed il resultato è composto d' un numero intero, e di parti decimali del cubo avente per lato l'*unità* lineare.

Prendo, per esempio, un paralellepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono 49^{mi}, 54 . 15^{mi}, 27, e 8^{mi}, 5; il prodotto 6430,0443 di questi numeri fa vedere che il paralellepipedo proposto contiene 6430 cubi d' un metro di lato, e 443 diecimillesimi di questo cubo.

I decimali quì sopra enunciati non son riportati che all'unità principale, la quale è il cubo d'un metro di lato, e che si chiama pur *metro cubo*: se si vuol decomporlo in parti, le quali sieno i cubi di parti decimali dell'unità lineare, bisogna osservare che
Il metro cubo contiene 10×10×10,ovv.1000 *decim. cub.*;
Il decimetro cubo . . 10×10×10,ovv.1000 *centim. cub.*;
e così dell'altre misure; che in conseguenza sono i millesimi, ed i millionesimi di metro cubo, ch'esprimono i decimetri cubi, ed i centimetri cubi; e in generale i decimali presi di tre in tre son quelli, che corrispondono a delle misure cubiche.

Il resultato 6430,0443 non contenendo un numero di cifre decimali, che sia multiplo di 3, bisogna supplirvi con degli *zeri*, e scriverlo così

6430, 044300.

In questa maniera si enuncia dicendo
6430 metri cubi, 44 decimetri cubi, e 300 centim. cubi.

E' inutile entrare in maggiori particolarità sopra questo soggetto; poichè sarà molto più comodo di tenersi alla prima enunciazione, purchè si abbia cura di non confondere il decimo, il centesimo, ec. del metro cubo col decimetro, col centimetro, ec. cubi. I primi si rapportano a de' paralellepipedi rettangoli aventi tutti per base il metro quadro, e per altezza un decimetro, un centimetro, ec.

Quando colle antiche misure non si voleva operare che sopra dei numeri interi, si convertiva ciascun de' fattori del volume cercato nelle suddivisioni della più piccola specie, che si fosse trovata nei tre; il prodotto trovavasi espresso in cubi aventi queste suddivisioni per lato; in linee cube, per esempio, se i fattori erano stati convertiti in linee. Arrivavasi in seguito a delle misure maggiori osservando che

il pollice cubo equivale a $12 \times 12 \times 12$,
ovvero. . . . . 1723 linee cube,
il piede cubo. . . . . 1728 pollici cubi,
la tesa cuba. . . . . $6 \times 6 \times 6$,
ovvero . . . 216 piedi cubi,

e dividendo tanto quanto era possibile per questi numeri.

Il più spesso lasciavansi i fattori sotto la forma di numeri complessi. Moltiplicando due de' fattori tra loro, calcolavasi primieramente in tese quadre, tese-piedi, tese-pollici, ec. l'area, che servir doveva di base al volume cercato (considerata come quella d'un paralellepipedo rettangolo); poi si riguardava quest' area come la base d'un paralellepipedo rettangolo avente una tesa d'altezza, e che stava in conseguenza al corpo cercato come l'unità stava al terzo fattore, che poteva allora essere riguardato come un numero astratto. E' manifesto che

1.° Una tesa quadra di base sopra una tesa d'altezza

forma un cubo d'una tesa di lato, ovvero una *tesa-cuba*.

2.° Una tesa-piede, vale a dire un rettangolo d'una tesa di lunghezza sopra un piede di larghezza, essendo presa per base d'un paralellepipedo rettangolo d'una tesa d'altezza, questo paralellepipedo ha due spigoli, o costole contigue d'una tesa, e può essere considerato come avente una tesa quadra di base sopra un piede d'altezza: gli si dà per questa ragione il nome di *tesa-tesa-piede*, il che si scrive *t. t. pi.*: ne son necessarie 6 per formare la tesa cuba;

3.° Una tesa pollice sopra una tesa di altezza forma parimente un paralellepipedo d'una tesa quadrata di base sopra un pollice di altezza, che si chiama *tesa-tesa-pollice*, e che s'indica per *t. t. po.*: ne son necessarie 12 per formare la tesa-tesa-piede;

4.° La medesima progressione somministra in seguito delle *tese-tese-linee*, ovvero *t. t. l.*, *tese-tese-punti*, ovvero *t. t. pt.*

Il volume del paralellepipedo d'una tesa di altezza si trova così espresso da un numero, il quale rapportasi a delle suddivisioni assai semplici; e non si tratta d'altro che di moltiplicare, col mezzo delle parti aliquote, questo numero per l'altezza del paralellepipedo proposto.

Ecco, per esempio, il paralellepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono

$$49^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po},\ 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po},\ \text{e}\ 5^{t}\ 2^{pi}\ 10^{po}.$$

Le due prime digià impiegate nell' articolo VIII. (pag. XLI) danno per prodotto

$$1634^{t.t}\ 3^{t.pi}\ 2^{t.po}\ 3^{t.l}\ 1c^{t.pt}.$$

Un paralellepipedo costrutto su questa base, e sopra una tesa d'altezza conterrebbe

$$1634^{t.t.t}\ 8^{t.t.pi}\ 2^{t.t.po}\ 3^{t.t.l}\ 1c^{t.t.pt};$$

moltiplicando questo numero per 5^{t}, 2^{pi}, $1c^{po}$, altezza del paralellepipedo proposto, avremo il volume di quest'ultimo

Geometria.

		$1634^{t.t.t}$ 5^{t}	$3^{t.t.pi}$ 2^{pi}	$2^{t.t.po}$ 10^{po}	$3^{t.t.l}$	$10^{t.t.pt}$	
		8170					
Per	$2^{t.t.pi}$	1	4				
	$1^{t.t.pi}$		5				
Per	$2^{t.t.po}$			10			
Per	$3^{t.t.l}$			1	3		
Per	$6^{t.t.pt}$				2	6	
	$2^{t.t.pt}$					10	
	$2^{t.t.pt}$					10	
Per	2^{pi}	544	5	0	9	3	$\frac{4}{12}$.
Per	6^{po}	136	1	3	2	3	$\frac{10}{12}$.
	2^{po}	45	2	5	0	9	$\frac{3}{12}$.
	2^{po}	45	2	5	0	9	$\frac{3}{12}$.
Prod. tot.		$8944^{t.t.t}$	$3^{t.t.pi}$	$1^{t.t.po}$	$8^{t.t.l}$	$3^{t.t.pt}$	$\frac{8}{12}$.

In luogo di $\frac{8}{12}$ si può aggiungere un' unità alle tese-tese-punti.

Nella pratica si ha raramente bisogno di spingere i calcoli fino alle ultime suddivisioni com' io l'ho fatto quì sopra, perchè il lor valore è quasi nullo; e quando non si tratta che di determinare il prezzo d'un' Opera, la forma di queste suddivisioni è la più comoda; frattanto esse qualche volta riduconsi a misure cubiche, e per questo serve osservare che

la tesa cuba contenendo 216 piedi cubi,
la tesa-tesa-piede ne cont. $\frac{216}{6}$, ovvero 36;
la tesa-tesa-pollice. . . . . $\frac{36}{12}$, ovvero 3;
la tesa-tesa-linea . . . . . $\frac{3}{12}$, ovv. $\frac{1}{4}$, ovv. 432^{po} cubi
(poichè il piede cubo contiene 1728 pollici cubi);
la tesa-tesa-punto. . . . . $\frac{432}{1728}$, ovvero 36^{po} cubi.

In conseguenza si moltiplicano respettivamente pè numeri 36, 3, $\frac{1}{4}$; 36 i diversi numeri delle suddivisioni indicate di sopra, coll' attenzione di moltiplicare per 432 il resto delle tese-tese-linee, se la divisione per 4 ne lasciasse una, di contare il prodotto per de' pollici cubi, ed unirlo a ciò, che daranno le tese-tese-punti. Il numero

$$8944^{t.t.t.}\ 3^{t.t.pi.}\ 1^{t.t.po.}\ 8^{t.t.l.}\ 4^{t.t.pt.}$$

trovato di sopra diviene

8944 tese cube, 113 piedi cubi, 144 pollici cubi.

L' uso de' Legnajuoli era di misurare i legnami non con la tesa cuba, ma colla *soliva*, che dessi avevano stabilita di 6 pollici *in quadro* su 12 piedi di lunghezza, vale a dire, formante un parallelepipedo rettangolo, la cui base fosse un quadrato di 6 pollici di lato, e l'altezza 12 piedi; questa base avendo $\frac{1}{2}$ piede di lato, contiene $\frac{1}{4}$ di piede quadro; e moltiplicando per l'altezza 12, si trovano 3 piedi cubi per il volume della *soliva*. Questo volume preso per *unità*, era diviso in sei parti chiamate *piedi di soliva*, ciascun de' quali equivaleva in conseguenza ad $\frac{1}{2}$ piede cubo, ovvero a 864 pollici cubi. Il piede di *soliva* si divideva pure in 12 parti chiamate *pollici di soliva*, e continenti in conseguenza ciascuno 72 pollici cubi.

Si vede che le divisioni della *soliva* seguivano la medesima legge che quella della tesa cuba in tese-tese-piedi, ec.; e la soliva intera essendo di 3 piedi cubi, si trova essere la 72.*ma* parte della tesa cuba. Si può dunque, moltiplicandola per 72, convertire un numero di tese-cube, tese-tese-piedi, ec., in *solive*, e parti di *soliva*; con questo mezzo la *tesa di legname* rientrerebbe nelle regole della tesa generale di tre dimensioni. Non è punto più difficile di formarsi delle regole particolari per ottenere immediatamente il resultato del *ricubare* in *solive*.

Ma quanto l'uniformità delle nuove misure, le quali riducon tutto al metro cubo, ovvero allo *stero*, e la loro suddivision decimale, la quale rende tutte le operazioni simili a quelle, che si effettuano sui numeri interi, son preferibili a questi diversi metodi, comunque ingegnosi essi possan sembrare! Ponendole quì sotto gli occhi del Lettore in paragone coi calcoli decimali, ho avuto principalmente per fine di render più mirabile l'immenso vantaggio di questi ultimi: vantaggio, del quale bisogna sperare che sarà convinta la Generazione futura, se la sua educazione sarà ben diretta su questo punto; poichè fino a tanto che gli Artefici non si disfaranno del piede, e della tesa, ch'essiportano secoloro, che i medesimi se ne serviranno per prendere le loro misure, e che dopo aver fatto il calcolo secondo queste misure, essi dovranno ancora, per conformarsi alla Legge, convertire le antiche misure in nuove, egli è impossibile che dessi

vedano nel Sistema metrico decimale altra cosa che un' innovazione importuna. Finalmente sarebbe necessario che tutti quelli, i quali hanno dei numeri da prescrivere, tanto come Amministratori che come Ingegneri, scegliessero tanto quanto è possibile de' numeri tondi in nuove misure, come facevasi nelle antiche.

Le conversioni da un Sistema in un altro divenendo rare di più in più, si effettuerebbero senza pena mercè delle *Tavole* calcolate già da gran tempo per quest' oggetto; e quando non si avessero queste *Tavole* sotto mano, vi si supplirebbe calcolando mediante le dimensioni ridotte in nuove misure il valor del volume, che si vuol esprimere con queste misure. In tal maniera formando il cubo del numero decimale, ch' esprime la tesa pel metro, si avrebbe il rapporto della tesa cuba al metro cubo.

Il legname da ardere misurasi disponendolo in una cassa o intelajatura, e la massa prende la forma d'un paralellepipedo rettangolo, il quale ha per base l'area di questa cassa, e per altezza la lunghezza dei *pezzi*. La cassa, che determinava l'antica *corda* o *catasta* aveva 8 piedi di lunghezza sopra 4 piedi di altezza, ed in conseguenza 32 piedi quadri di superficie. La lunghezza de' *pezzi* essendo di 4 piedi, la *corda* di legna conteneva 128 piedi cubi; e di questo numero se ne calcolerebbe senza pena il rapporto col metro cubo, ossia stero.

Quando le misure non son de' paralellepipedi, ma de' cilindri, come lo erano i *litroni*, le *staja*, e come lo sono i *litri*, i loro volumi si calcolano col mezzo dell' espressioni proprie a questa forma di Corpi.

PAG.	V.	ERRORI.	CORREZIONI.
7	7	porzioni *ab'*	porzioni A*b'*
ivi	25	nè verso **A**	nè verso D
23	34	sono eguali	sono ineguali
56	9	$2\overline{AB} \times \overline{BD}^2$	$2\overline{AB} \times \overline{BD}$
80	32	l' arco BC	l'arco DC
130	ult.	un misura	una misura
134	28	manifestameote	manifestamente
155	14	perpendicolare	perpendicolari
159	12	la piano	al piano
180	26	piramadi	piramidi
202	4	del' uno	dell' uno
213	ult.	troneato	troncato
217	31	*Corollorio*	*Corollario*
224	24	l'arco *ab*	l'arco *ad*.

OSSERVAZIONE.

Nella forma del ragionamento adottato per l'esposizione degli *Elementi di Geometria*,

Un *Assioma* è una verità evidente per se stessa ;

Un *Teorema* è una Proposizione da dimostrarsi ;

Un *Corollario* è una conseguenza d' una Proposizione digia dimostrata ;

Un *Problema* è una question da risolversi ;

Una Proposizione, la quale non serve che di preparativo ad un' altra, si chiama pur ***Lemma*** ;

E si dà alle *Osservazioni* il nome di *Scolj*.

È a proposito l'avvertire che un *Teorema* contiene due parti, cioè, l' *ipotesi*, e la *conclusione*, la quale n'è la sua conseguenza. Non è sempre possibile di rovesciar l'enunciato, vale a dire, che prendendo la conclusione per l' ipotesi, non si ha sempre per conclusion necessaria l' ipotesi primitiva ; e ciò perchè la conclusion primitiva convien qualche volta ad un maggior numero di casi che l' ipotesi : da ciò proviene la necessità di dimostrar le Proposizioni inverse allorchè si vuol farne uso.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA.

Nozioni generali sull' estensione.

1. Lo Spazio, che i Corpi occupano, ha necessariamente tre dimensioni, le quali si denotano coi nomi di *lunghezza*, *larghezza*, e *profondità*, o *grossezza*.

Un Corpo non può esser privato d'una di queste dimensioni senza cessare d'esistere; ma non è distinto dallo spazio indefinito se non perchè desso è terminato, ovvero perchè egli ha dei limiti, senza dei quali non potrebb'essere concepito. Questi limiti, i quali cadono sotto dei nostri sensi, e non hanno grossezza, son delle *superficie*.

Quando un Corpo presenta più faccie, ciascuna di loro ha nel luogo, ov'essa s'unisce ad un'altra, i suoi limiti, i quali non hanno nè *grossezza*, nè *larghezza*, e si chiamano *linee*.

Finalmente quest'ultime hanno pure, in quei luoghi ove desse s'incontrano, i loro limiti, o le loro estremità, le quali non hanno nè grossezza, nè larghezza, nè lunghezza, e si nominan *punti*.

L'esistenza di queste diverse specie di limiti non può esser posta in niun dubbio, poichè non

è che per il lor mezzo che noi giudichiamo della figura de' Corpi. Noi le consideriam colla mente, ciascuna in particolare, facendo astrazione da una, ovvero da due delle dimensioni del Corpo, le quali d'altronde non potrebbero essere annichilate; imperocchè, siccome noi non possiam che modificare le forme della materia, le nostre operazioni s'effettuano sempre su dei Corpi, e non mai sulle superficie, sulle linee, o sui punti; ma il lor resultato allontanasi tanto meno da quello del raziocinio quanto maggiore è la cura, che noi apportiamo nel diminuire le dimensioni, che non si referiscano a quelle del limite, che abbiamo considerato sul Corpo. Mediante il ragionamento apprendiam questo limite; col calcolo possiamo approssimarvici indefinitamente, mentre all'opposto l'esattezza delle operazioni meccaniche trova i suoi confini nell'imperfezione inevitabile degli Istrumenti.

2. Tra le linee quella, che si presenta la prima, è la linea retta, della quale se n'acquista un'idea chiara allorchè si enuncia che sia il più corto cammino per andare da un punto ad un altro.

In quest'idea trovasi pure compresa la possibilità di prolungare la linea retta indefinitamente al di là di ciascuno dei termini, che le abbiamo fin da principio assegnati, e l'impossibilità di far ciò in più maniere.

È manifesto che non v'è che una sola linea retta: qualunque linea, la qual non è retta, o composta di linee rette, è *curva*, e si concepisce che vi debb'essere un'infinità di linee curve.

Fra le diverse superficie, le quali terminano i Corpi, osservasi in primo luogo il *piano*, ovvero

la *superficie piana*, che differisce da qualunque altra superficie in questo che vi si può applicar sopra esattamente, ovvero segnare una linea retta per tutti i versi: non vi può essere che una sola specie di piani.

Qualunque superficie, che non è piana, o composta di più piani, è *curva*; ed il numero delle superficie curve è infinito.

Esporrò successivamente le proprietà più considerabili delle linee, delle superficie, e dei corpi, limitandomi a quelle, le quali è indispensabilmente necessario conoscere per istudiare con frutto i diversi rami delle Matematiche pure, e applicate.

PRIMA PARTE.

SEZIONE PRIMA.

Delle proprietà delle Linee rette, e circolari.

N. B In tutta questa prima Parte le linee rappresentate nelle Figure son poste in un medesimo piano.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

3. Non si considerano negli *Elementi di Geometria* che due specie di linee, cioè: la *linea retta*, o semplicemente la retta, ch'è il più corto cammino per andar da un punto ad un'altro, e la *Circonferenza del Circolo*, ovvero la *linea circolare*, di cui tutti i punti, situati nel medesimo piano, sono egualmente lontani da un altro punto preso in questo piano, e che chiamasi *centro*.

AB. *fig.* 1.ª è una linea retta. È manifesto (2) Fig 1
che nulla si oppone a ciò che si prolunghi indefinitamente la retta AB al di quà del punto A, e al di là del punto B, e che dessa sarà determinata da

due altri qualunque de' suoi punti C, e D, nello stesso modo ch'è determinata dai punti A, e B; vale a dire che se uno si proponesse d'unire con una retta i punti C, e D, la detta retta passerebbe sulla linea AB.

Fig. 2. ABCD, *fig.* 2, è una Circonferenza di circolo, il cui centro è in O. Le rette AO, BO, CO, le quali misurano la distanza dei punti qualunque A, B, C di quest'ultima linea dal centro O, e son tutte eguali tra loro, si chiamano i *raggi* del circolo: una parte qualunque della sua circonferenza chiamasi *arco*: finalmente s'intende per Circolo la porzione del piano terminata per ogni parte dalla linea circolare.

È manifesto che, per trovar tutti i punti, i quali sono ad una distanza data *ao* dal punto O, serve descrivere da questo punto come centro, e con un raggio eguale ad *ao* una circonferenza di Circolo.

Ciò premesso, considererò immediatamente le linee rette.

4. Misurar la distanza di due punti, ovver la lunghezza d'una retta, vuol dir cercare quante volte questa retta ne contiene un'altra presa per unità, il che s'effettua portando la seconda sulla prima tante volte quant'è possibile; e se si trovi un resto, bisogna procurare di valutar questo resto in frazione della seconda, ovvero dell'unità.

Generalmente misurar una linea per un'altra vuol dir cercare il rapporto di queste due linee, ovvero cercare se v'è una linea più piccola, la quale sia contenuta un numero esatto di volte nell'una, e nell'altra, e che in conseguenza sia la misura comun di ambedue. Questa ricerca è dunque, per rapporto alle linee, l'istessa di quella del comun divisore a riguardo dei numeri.

PROBLEMA.

5. *Essendo date due rette, trovare la lor comune misura, o almeno il rapporto approssimativo dell'una all'altra.*

Soluzione. Sieno AB, e CD, *fig.* 3, queste due rette: porteremo la minore CD sulla maggiore tante volte quante potrà esservi contenuta: troveremo che dessa vi è contenuta tre volte da A fino ad E con un resto EB; di maniera che avremo Fig. 3.

$$AB = 3CD + EB.$$

Porteremo in seguito su CD il resto EB, il quale vi si troverà contenuto quattro volte con un secondo resto FD; il che darà

$$CD = 4EB + FD.$$

Porteremo questo secondo resto sopra EB; e siccome vi sarà contenuto una volta da E in G con un terzo resto GB, avremo

$$EB = FD + GB.$$

Finalmente GB essendo portata sopra FD, e trovandovisi contenuta tre volte, conseguiremo per ultimo resultato

$$FD = 3GB.$$

Rimontando dal valore di FD a quello di EB, da questo a quello di CD, e da quest'ultimo a quello di AB, troverem successivamente

$FD = 3GB$, $EB = 4GB$, $CD = 19GB$, $AB = 61GB$:

dal che si vede che l'ultimo resto GB è la comune misura delle rette AB, e CD; e siccome il detto resto è contenuto 61 volte nella prima, e 19 volte nella seconda, ne segue che queste rette son tra di loro nel rapporto di 61 a 19.

Non v'è cosa più facile adesso che d'applicar questo metodo a qualunque altro esempio. Il paragone dei resti consecutivi debb'essere spinto fino a che non se ne trovi uno, il quale sia contenuto un numero esatto di volte in quello, che lo precede, ovvero che sia tale che il resto, che desso potrebbe lasciare in quest'operazione, sfugga ai nostri sensi per la sua piccolezza. In tal maniera arriverem sempre ad un resultato almeno approssimativo.

6. È manifesto che una retta non può incontrarne un'altra se non che in un sol punto (3).

Fig. 4. 7. Lo spazio indefinito BAC, *fig.* 4, compreso tra due rette, le quali si tagliano in un punto A, e si possono concepir prolungate tanto quanto vorremo, chiamasi *angolo*. Benchè questo spazio non sia rinchiuso dalla parte di BC, egli è nulladimeno ben distinto dal resto del piano mediante i limiti AB, e AC. Due angoli posson differire tra loro a questo riguardo; la retta AD, per esempio, fa evidentemente con AB un angolo maggiore di quello, che fanno tra loro le rette AB, e AC.

Si denota ordinariamente un angolo con tre lettere, ponendo nel mezzo quella, che occupa il punto ove le due linee si tagliano; punto, il quale chiamasi *vertice* dell'angolo. L'angolo formato dalle rette AB, e AC è l'angolo BAC. Quando non v'è che un sol angolo in un punto, come, per esempio, in *a*, si può non mettere che la lettera del vertice, e dire l'angolo *a*.

8. Due angoli sono eguali allorchè, essendo posti l'uno sopra l'altro, essi ricuopronsi o combaciano perfettamente. L'angolo *bac* sarà eguale all'angolo BAC se la retta *ab* essendo

posta sopra AB in modo che il punto *a* sia sul punto A, l'altra retta *a c* cade sopra AC. Non è necessario, perchè l'eguaglianza abbia luogo, che le lunghezze delle linee AB, e *a b*, AC, e *a c* sieno respettivamente eguali; perchè si concepisce perfettamente che, se nelle porzioni *ab'*, e A*c'* delle lor lunghezze le rette AB, e AC si confondono colle rette *a b*, e *a c*, succederà lo stesso in tutto il rimanente allorchè prolungheremo quest'ultime d'una quantità sufficiente.

9 La posizion respettiva di due rette dipende dall'angolo, ch'esse fanno tra loro. Fra tutte le situazioni, che una retta può avere a riguardo d'un'altra, che dessa incontra, la più notabile è la situazion *perpendicolare*. Con questa parola si denota il caso, nel quale una retta AC, *fig.* 5, Fig. 5.
cadendo sopra un'altra AB, fa con quest'ultima, prolungata al di là del punto A in AD, due angoli BAC, e DAC eguali tra loro, vale a dire, che se allora pieghisi la Figura lungo la linea AC, la porzione AB della retta BD dee posarsi sull'altra porzione AD.

È manifesto che, in questo caso, la retta AC non pende nè verso A nè verso D.

Gli angoli BAC, e CAD son chiamati *angoli retti*.

Qualunque angolo minore d'un retto si dice *angolo acuto*. L'angolo BAE è un angolo acuto.

Qualunque angolo maggiore d'un retto si dice *angolo ottuso*. L'angolo BAF è un angolo ottuso.

È chiaro che un angolo retto dee ricuoprirne un altro; per esempio, che l'angolo retto A'B'D' *fig.* 6, essendo posto sull'angolo Fig. 6.

retto ABD, dee coprirlo esattamente. Infatti, se si prenda AB = A′B′, e si porti in seguito la Figura A′C′D′ sopra ACD, facendo coincidere i punti A′, e B′ coi punti A, e B, le rette AC, e A′C′ si copriranno perfettamente, poichè non se ne può, tirar che una sola tra due punti dati: e se la linea B′D′ non cadesse allora su BD, ma prendesse una posizione Bd, gli angoli A′B′D′, D′B′C′ rappresentati da ABd, dBC non sarebbero eguali, ed in conseguenza non sarebbero retti.

10. Si fa manifesto dalla sola ispezione della *fig.* 5, che la somma di tutti gli angoli BAE, EAC, CAF, FAD, i quali si posson fare dalla medesima parte d'una retta, ed intorno ad un de' suoi punti preso per vertice, equivale sempre a due retti, qualunque sia il numero di questi angoli. Fig. 5.

11 Allorchè una retta AE cade sopra un'altra retta prolungata da una parte, e dall'altra del punto d'incontro, essa fa con quest'ultima due angoli EAB, e EAD, i quali riuniti insieme equivalgono a due retti.

Due rette BD, ed EF, *fig.* 7, le quali si tagliano, essendo prolungate al di là del loro punto d'incontro A, formano intorno a questo punto quattro angoli, i quali sono opposti al vertice due a due, cioè, EAB a FAD, EAD a FAB. Fig. 7.

TEOREMA.

12. *Gli angoli opposti al vertice formati da due rette, che si tagliano, sono eguali.*

Dimostrazione. Infatti resulta dal numero precedente che la somma degli angoli BAE, e DAE, posti dal medesimo lato della retta DB, è eguale a due retti, e che quella degli angoli DAE, e DAF, posti dal medesimo lato della

retta EF, è pur eguale a due retti: dal che ne segue che gli angoli BAE, e DAE riuniti equivalgono agli angoli DAE, e DAF parimente riuniti. Togliendo da una parte, e dall'altra l'angolo comune DAE, resterà l'angolo BAE eguale all'angolo DAF, il quale gli è opposto al vertice.

Si dimostrerebbe non diversamente che l'angolo DAE è eguale a BAF.

13. *Corollario*. Segue dalla Proposizion precedente, che se si continui al disotto di AB, *fig*. 8, la retta AC, la quale fa con DB due angoli retti CAB, e CAD, il suo prolungamento AE farà pure dall'altro lato di AB due angoli retti BAE, e DAE; poichè questi angoli essendo opposti al vertice rispetto agli angoli CAD, e CAB, che si suppongono retti, saranno retti essi pure (9). Fig. 8.

Resulta ancora da ciò che CE essendo perpendicolare sopra DB, DB lo è parimente sopra CE.

Se adesso conducansi per il punto A tante rette FG, HI, ec. quante ne vorremo, è manifesto che la somma di tutti gli angoli BAF, FAC, CAH, HAD, DAG, GAE, EAI, IAB, che queste rette faranno tra loro, non comporrà giammai se non che quattro angoli retti.

14. Non si può rinchiudere uno spazio con un numero di rette minore di tre. Questo spazio si chiama *triangolo*. Le linee, che lo terminano, tagliansi due a due, e forman tre angoli: ABC, *fig*. 9, è un triangolo, i di cui lati sono AB, AC, BC; ed i tre angoli sono A, B, C. Fig. 9.

Le prime proprietà del triangolo servendo di base a tutto ciò, che riguarda la situazion respettiva delle rette, conviene farle conoscere avanti d'andare più oltre.

15. *Osservazioni*. Poichè la linea retta AB è il più corto cammino per andare dal punto A al punto B, ne segue che la somma dei due altri lati AC, e BC del triangolo ABC sorpassa AB; e vedrem parimente che la somma di due lati qualunque d'un triangolo supera sempre il terzo.

Ma, se si prenda nell'interno d'un triangolo ABC un punto qualunque E, e si tirino le rette AE, ed EB, la somma di queste rette sarà minore di quella delle rette AC, e BC, che le circondano. Infatti, se si conduca pel punto E una retta GF. la quale tagli nel tempo stesso le rette AC, e BC, avremo

$$GF < GC + CF;$$

dal che ne segue che il contorno AGFB sarà minor della somma delle rette AC, e CB. Per la ragione medesima

$$AE < AG + GE,\ EB < EF + FB;$$

$$\text{dunque}\quad AE + EB < AG + GE + EF + FB,$$

ovvero minor del contorno AGFB, ed in conseguenza, a più forte ragione, minor della somma delle rette AC, e BC.

Si distinguon sei cose in un triangolo, cioè, tre angoli, e tre lati. Vi son tra queste sei cose delle relazioni necessarie, che son contenute nelle Proposizioni seguenti.

TEOREMA.

16. *Allorchè due triangoli hanno un angolo eguale contenuto da due lati respettivamente eguali, essi son eguali in tutte l'altre lor parti.*

Fig. 10. Se l'angolo C del triangolo ABC, *fig.* 10, è eguale all'angolo C′ del triangolo A′B′C′, ed i lati AC, e BC, che comprendono il primo di

questi angoli, sieno respettivamente eguali ai lati A′C′, e B′C′, i quali comprendono l'altro, il triangolo ABC sarà eguale al triangolo A′B′C′ in tutte le sue parti restanti, vale a dire, l'angolo A sarà eguale all'angolo A′, l'angolo B all'angolo B′, ed il lato AB al lato A′B′.

Dimostrazione Se si porti il triangolo A′C′B′ sul triangolo ACB in modo che il lato A′C′ cada sopra AC, ponendo il punto C′ sul punto C, il punto A′ si troverà sul punto A, poichè A′C′ = AC; di più, gli angoli ACB, e A′C′B′ essendo eguali per l'ipotesi si cuopriranno esattamente, ed il lato C′B′ cadrà in conseguenza sul lato CB: finalmente il punto B′, cadrà sul punto B, poichè CB = C′B′. La retta A′B′ avendo le sue due estremità su quelle della retta AB si confonderà con quest'ultima: il triangolo A′C′B′ coprirà dunque esattamente il triangolo ACB, e gli sarà perfettamente eguale.

È importante osservare che i lati eguali, ovvero quelli, che si ricoprono allorchè le due Figure son poste l'una sull'altra, si trovano opposti ad angoli eguali in ciascun dei triangoli; cosi A′B′, il qual si confonde con AB, è opposto all'angolo C′ eguale all'angolo C. Lo stesso accade nelle Proposizioni seguenti.

17. *Corollario.* Un triangolo è interamente determinato da un de' suoi angoli, e dai due lati, che lo comprendono; poichè, quando due triangoli son eguali in queste parti, dessi lo sono in tutte le altre. Possiamo pure convincerci di questa verità osservando che, quando l'angolo C è dato, la situazion respettiva dei lati AC, e CB lo è pure; e se abbiasi inoltre la loro lunghezza, la quale fissa i punti A, e B, non si possono unir questi

punti che con la sola retta AB, e così non si ottiene che il solo triangolo ABC.

TEOREMA.

18. *Allorchè due triangoli hanno respettivamente un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali; questi triangoli sono perfettamente eguali.*

Se il lato AB del triangolo ABC è eguale al lato A′B′ del triangolo A′B′C′, e gli angoli CAB, e CBA del primo triangolo sieno respettivamente eguali agli angoli C′A′B′, e C′B′A′ del secondo, questi due triangoli saranno totalmente eguali.

Dimostrazione. Per riconoscere la verità di questa Proposizione, bisogna concepir che il triangolo A′B′C′ sia posto sul triangolo ABC in modo che il lato A′B′ sia collocato sopra il suo eguale AB, cioè, il punto A′ sul punto A, ed il punto B′ sul punto B. Segue dall'eguaglianza degli angoli CAB, e C′A′B′ che il lato A′C′ dee cadere nella direzione del lato AC; parimente gli angoli CBA, e C′B′A′ essendo eguali, il lato C′B′ cadrà nella direzion di CB, ed il punto C′, comune ai due lati C′A′, e C′B′, si troverà in conseguenza sul punto C, comune ai due lati CA, e CB: i due triangoli si ricopriranno dunque perfettamente, e saranno eguali perciò in tutte le loro parti.

TEOREMA.

19. *Se i lati* A′B′, *e* B′C′ *del triangolo* A′B′C′, Fig. 11. fig. 11, *son respettivamente eguali ai lati* AB, *e* BC *del triangolo* ABC, *e l'angolo* B′ *compreso tra i due primi sia minore dell' angolo* B *compre-*

so tra i due ultimi, il lato A′C′, *opposto all'angolo* B′ *nel triangolo* A′B′C′, *sarà minore del lato* AC, *opposto all'angolo* B *nel triangolo* ABC.

Dimostrazione. Infatti, allorchè si pone il triangolo A′B′C′ sul triangolo ABC, collocando A′B′ sopra AB, il punto C′ non può prendere che le tre posizioni rappresentate in C″, ai num. 1, 2, e 3 della Figura.

Per la prima, nella quale il punto cade sul lato AC, è manifesto che AC″, che rappresenta A′C′, è minore di AC.

Rispetto alla seconda, la quale suppone il punto C″ dentro il triangolo ABC, avrebbesi

$$AC'' + BC'' < AC + BC \text{ (15).}$$

donde resulterebbe egualmente

$$AC'', \text{ ovvero } A'C' < AC,$$

poichè BC″, che rappresenta B′C′, è eguale a BC per ipotesi.

Finalmente nella terza posizione il punto C″ essendo esterno riguardo al triangolo ABC, si avrebbe

$$AC'' < OC'' + OA, \quad BC < OB + OC,$$

di dove concluderebbesi

$$AC'' + BC < OC'' + OA + OB + OC;$$

ciò che riducesi immediatamente a

$$AC'' + BC < AC + BC'',$$

poichè $OC'' + OB = BC''$, $OA + OC = AC$, e togliendo in seguito da ambe le parti le linee eguali BC, e BC″, resterebbe sempre

$$AC'' \text{ ovvero } A'C' < AC.$$

20. *Corollario*. Procede da ciò che *due triangoli, di cui i tre lati sien respettivamente eguali,*

son eguali in tutte le loro parti; poichè se i lati
Fig. 10. AB, AC, BC del triangolo ABC, *fig.* 10, son respettivamente eguali ai lati A′B′, A′C′, e B′C′ del triangolo A′B′C′, l'angolo compreso tra due lati qualunque del primo sarà eguale all'angolo compreso tra i due lati eguali a questi nel secondo. Se, per esempio, un dei due angoli B, e B′ fosse minore dell'altro, anch'uno dei lati AC, e A′C′ sarebbe minore dell'altro (*n.° preced.*), il che è contra l'ipotesi: dunque i triangoli ABC, e A′B′C′ hanno nel tempo medesimo i loro lati, ed i loro angoli respettivamente eguali, e sono in conseguenza eguali (16, o 18).

PROBLEMA.

21. *Essendo dati separatamente i tre lati d'un triangolo, descrivere il triangolo.*

Fig. 12. *Soluzione.* Sieno M, N, P, *fig.* 12, le tre linee rette date: avendo preso la prima per formare il lato AB, descriveremo dal punto A, come centro, e con un raggio eguale alla seconda linea N, un circolo CDC′; poi dal punto B come centro, e con un raggio eguale alla terza linea P un altro circolo CEC′. Le loro circonferenze si taglieranno in due punti C, e C′, situati uno al di sopra di AB, e l'altro al disotto. Unendo ciascuno di questi punti coll'estremità della linea AB, formerem due triangoli, i quali soddisfaranno al Problema; poichè dessi avranno i lor lati respettivamente eguali alle tre linee date.

22. *Osservazioni.* Se si prendessero tre rette, a caso, potrebbe accadere che le circonferenze dei due circoli descritti non s'incontrassero. Questa circostanza averebbe luogo 1.° nel caso ove

N + P fosse minore di M. Infatti è manifesto, e lo dimostreremo d'altronde in seguito, che due circoli non posson tagliarsi se non che quando la distanza dei loro centri è minor della somma dei loro raggi; 2.° nel caso ove uno dei circoli abbracciasse l'altro, vale a dire, quando si avesse

$$AD > AB + BF, \text{ ovvero } N > M + P.$$

Questi due casi son compresi nella condizion generale che la somma di due lati qualunque d'un triangolo è sempre maggiore del terzo, e che si può semplicizzare enunciandola così: *la somma dei due più piccoli lati d'un triangolo è sempre maggiore del terzo*. Infatti la condizione N + P > M dee bastare allorchè N, e P son minori di M; poichè in questo caso le condizioni N + M > P, e P + M > N son necessariamente soddisfatte.

La soluzione del precedente Problema, la qual pone in istato di costruire un triangolo eguale ad un altro facendo uso dei lati di quest'ultimo, offre il mezzo di far un angolo eguale ad un altro.

PROBLEMA.

23. *Per un punto dato, preso sopra una retta data, far un angolo, che sia eguale ad un angolo dato.*

Soluzione. Sieno, *fig.* 13, CAB l'angolo dato, Fig. 13.
A′B′ la retta, sulla quale si vuol costruire il nuovo angolo, che dee avere il suo vertice in A′; prendo sui lati del primo, a partir dal vertice, due distanze AB, e AC eguali tra loro, ed unisco con una retta i punti C, e B ove desse terminano. Portando in seguito AB da A′ in B′, non ho che a descrivere sopra A′B′ un triangolo, di cui i due lati A′C′, e B′C′ sien respettivamente

eguali ad AC, ed a BC; lo che si fa segnando una delle due intersezioni C′ delle circonferenze dei circoli descritti coi raggi AC, e BC, dai punti A′, e B′ come centri. Quindi tirando A′C′, l'angolo C′A′B′ sarà eguale all'angolo CAB; poichè i triangoli CAB, e C′A′B′ sono eguali per costruzione (21).

PROBLEMA.

24. *Essendo dato un triangolo, costruirne un altro, che gli sia eguale, impiegando nella costruzion di quest'altro un angolo del primo, e i due lati, che lo comprendono.*

Soluzione. Se quest'angolo, e questi lati sono l'angolo C, e le rette AC, e BC del triangolo
Fig. 10. ABC, *fig.* 10, faremo sulla retta A′C′ un angolo C′ eguale a C; poi prenderemo sopra i suoi lati A′C′, e C′B′, a partire dal punto C′, delle distanze eguali AC, e BC, le quali determineranno i punti A′, e B′, unendo questi punti con una linea retta, formeremo il triangolo A′B′C′ eguale al triangolo ABC, per il num°. 16.

PROBLEMA.

25. *Essendo dato un triangolo, costruirne un altro, che gli sia eguale, impiegando nella costruzion di quest'ultimo un lato del primo, ed i due angoli adiacenti.*

Soluzione. Essendo AB questo lato, A, e B gli angoli adiacenti, prenderemo sulla retta A′B′ una parte A′B′ = AB; faremo, alle due estremità di A′B′, gli angoli A′, e B respettivamente eguali agli angoli A, e B. Avendo in tal maniera la di-

rezion

rezion delle rette A′ C′, e B′ C′, prolungandole fino a che desse s'incontrino in C′; formeremo il triangolo A′ B′ C′ eguale al triangolo ABC, per il n.° 18.

DELLE LINEE PERPENDICOLARI, E DELLE LINEE OBLIQUE.

TEOREMA.

26. *Le linee* AC, *e* CB, fig. 14, *le quali si partano da un punto qualunque* C *della retta* CD *perpendicolare sopra* AB, *e si allontanino egualmente dal piede di questa perpendicolare, vale a dire dal punto* D *ove dessa incontra la linea* AB, *sono eguali; e quelle, che se ne allontanan di più, son le più lunghe.* Fig. 14.

Dimostrazione. Poichè si suppone che le distanze AD, e DB sien eguali tra loro, e si sa che, per la natura della perpendicolare, gli angoli CDA, e CDB son eguali (9), e perchè finalmente la linea CD è comune ai due triangoli ACD, e DCB, ne segue che questi triangoli hanno un angolo eguale compreso tra dei lati respettivamente eguali, e sono in conseguenza eguali (16): dunque BC = AC: dunque le linee AC, e BC, le quali si discostano egualmente dalla perpendicolare CD, sono eguali tra loro.

Se tirasi per il punto C la retta CE, la quale s'allontani di più da CD di quelche non lo faccia CA, si prolunghi CD al di sotto di AB d'una quantità C′ D = CD, e si conducan le rette AC′, e C′E, avremo

$$CE + C'E > CA + C'A \text{ (15).}$$

Ma i triangoli CAD, e C′AD saranno eguali, in

virtù del n.° 16, poichè gli angoli ADC, e ADC′ son eguali (13), i lati CD, e C′D son eguali per costruzione, ed il lato AD è comune a questi due triangoli; avrem dunque

$$AC = AC'.$$

Dimostreremo nella stessa maniera che CE=C′E, e ne resulterà

$$2\,CE > 2\,CA, \text{ ovvero } CE > CA;$$

il che dimostra che le linee, che s'allontanan di più dalla perpendicolare, son le piu lunghe.

27. 1.° *Corollario*. Le linee CA, CB, CE si chiamano *oblique* per rapporto alla linea AB; e si dice in conseguenza che *le oblique, le quali si allontanano egualmente dalla perpendicolare, sono eguali, e che quelle, le quali se n' allontanan di piu, son le più lunghe:* dal che ne resulta evidentemente che, se due oblique sono eguali, desse non cadono dal medesimo lato della perpendicolare, ma che le medesime si allontanano egualmente dal suo piede sì da un lato che dal lato opposto.

28. 2.° *Corollario*. Resulta da ciò 1.° che la perpendicolare CD è la più corta tra tutte le linee, che si posson condurre dal punto C sulla retta AB, ed è in conseguenza la misura naturale della distanza tra questo punto, e questa retta:

2.° Ch'essa ha tutti i suoi punti ad egual distanza dai punti A, e B; poichè, se si prenda sulla sua direzione un punto qualunque F, avrem parimente

$$AF = FB:$$

3.° Che un punto qualunque G, preso fuori della perpendicolare, è inegualmente lontano dai punti A, e B; poichè si ha

$$BG < BF + FG,$$

di dove $$BG < AG,$$

poichè $BF = AF$, e $AG = AF + FG$:

4.° Finalmente che da un punto a una retta non si posson condurre tre rette eguali.

PROBLEMA.

29. *Condurre sulla linea* AB, *fig.* 15, *una perpendicolare, che la divida in due parti eguali.* Fig. 15.

Soluzione. Dai punti A, e B presi successivamente per centri, e con un' apertura di compasso, maggiore comunque della metà di AB, descriveremo due archi di circolo CE, e CF, i quali si taglieranno in un punto C (*). Faremo la stessa cosa al di sotto di AB, ed unendo i punti C, e C′, la retta CC′ sarà la perpendicolare richiesta. Infatti i triangoli CBC′, e CAC′ son eguali come aventi tutti i lor lati respettivamente eguali (20), poichè $AC = CB$, $AC' = BC'$, e CC′ è comune ai due triangoli; gli angoli ACD, e DCB son dunque eguali tra loro. I lati AC, e CD, CB, e CD, che gli contengono nei triangoli ACD, e DCB, essendo respettivamente eguali, questi ultimi triangoli son eguali per il n.° 16: dunque l' angolo ADC, eguale all' angolo CDB, è in conseguenza retto; di più, a motivo di $AD = BD$, il punto D è quel di mezzo di AB.

(*) Per semplicizzar la Figura, non si son segnate le circonferenze intere, come nella Figura 12, ma solamente le porzioni vicine alle intersezioni cercate. Si farà sempre lo stesso d' ora in avanti.

PROBLEMA.

Fig. 16. 30. *Per un punto dato* D, fig. 16, *sopra una retta* AB, *alzare una perpendicolare a questa retta.*

Soluzione. Sia D il punto della linea AB, pel quale si vuole alzar la perpendicolare; prenderemo da una parte, e dall' altra di questo punto le distanze eguali AD, e BD, e dai punti A, e B, con dei raggi eguali, descriveremo i due archi di circolo CE, e CF, i quali si taglieranno nel punto C: questo punto essendo unito col punto D, la linea retta CD sarà perpendicolare sopra AB. Infatti le rette AC, e CB essendo eguali, come pure le parti AD, e DB, i triangoli ACD, e BCD, che hanno in oltre un lato comune CD, sono eguali, ed in conseguenza l'angolo ADC = CDB.

PROBLEMA.

Fig. 17. 31. *Per un punto dato* C, fig. 17, *preso fuori d' una retta* AB, *abbassare una perpendicolare su questa retta.*

Soluzione. Dal punto C come centro, e con un raggio preso a piacimento, ma peraltro maggiore della più corta distanza del punto C dalla retta AB, descriveremo un arco di circolo, il quale taglierà AB nei punti A, e B; prenderemo in seguito questi punti per centri, e col medesimo raggio descriveremo due altri archi di circolo, i quali tagliandosi in C′ determineranno un secondo punto della perpendicolare richiesta CC′. Infatti i punti A, e B essendo per costruzione egualmente lontani dal punto C, ed egualmente lontani dal punto C′, dimostreremmo, come nel n.° 29, che gli angoli ADC, e BDC sono retti.

TEOREMA.

32. *Da un punto* C *preso fuori d'una retta* AB *non si può abbasare su questa retta che una sola perpendicolare* CD.

Dimostrazione. Le oblique AC, e BC determinate nel precedente Problema essendo eguali, debbono allontanarsi egualmente dalla perpendicolare (27), la quale non può passare in conseguenza che pel punto D nel mezzo dell'intervallo AB: ora, pei punti C, e D non possiamo condurre che la sola retta CD; e tutte le oblique, le quali saranno eguali due a due, qualunque sia d'altronde la loro lunghezza, non potranno incontrar AB se non che a distanze eguali dal punto D. Difatto, se ciò non fosse, per esempio, rispetto alle oblique EC, e FC, e fosse DF > DE, potrebbesi prendere DF′ = DE, e tirare F′C, che sarebbe eguale a CE; troverebbonsi allora dal medesimo lato della perpendicolare CD due oblique eguali, lo che è impossibile (27): dunque l'arco di Circolo descritto col raggio CE dee pure incontrare AB in F′; ed in conseguenza la perpendicolare CD è unica.

Quando il punto, dal quale si dee condur la perpendicolare, è preso sulla linea proposta, il Teorema è evidente (9).

33 1.° *Corollario*. Segue da ciò che due rette DE, e FG perpendicolari ad una medesima retta AB, *fig.* 18, non s'incontreranno mai per quanto si suppogano prolungate tanto al disopra, che al disotto di questa retta; poichè, se desse s'incontrassero, potrebbesi dal punto ove le medesime si tagliano abbassar due perpendicolari sulla retta AB; lo che è assurdo. Fig. 18.

34. 2.° *Corollario* Segue pure dalla medesima Proposizione 1.° che due triangoli ABC, A′B′C′, *fig.* 19, i quali hanno ciascuno un angolo retto, l'uno Fig. 19

in A, e l'altro in A′, sono eguali allorchè i loro lati BC, e B′C′ respettivamente opposti agli angoli retti, come pure uno degli altri loro angoli B, e B′ per esempio, sono eguali.

Infatti, se si porti il triangolo A′B′C′ sul triangolo ABC, ponendo l'angolo B′ sull' angolo B, il lato B′C′ coprirà esattamente il suo corrispondente BC; il lato A′B′ cadrà nella direzione di AB; e se il lato A′C′, la cui estremità C′ si trova sul punto C, non si applicasse esattamente sopra AC, ne seguirebbe che si potrebbero abbassare dal pounto C due perpendicolari sopra AB, coincidente adesso con A′B′ quanto alla sua direzione.

2.° L' eguaglianza de' medesimi triangoli avrebbe luogo ancora se i lati AC, e BC fossero respettivamente eguali ai lati A′C′, e B′C′; poichè ponendo uno di questi triangoli sull' altro in modo che A′C′ fosse sopra AC, il lato A′B′ caderebbe allora sopra AB, perchè gli angoli BAC, e B′A′C′ sono eguali, come retti; i lati BC, e B′C′ divenendo delle oblique eguali poste da un medesimo lato della perpendicolare AC, se ne allontanerebbero egualmente, e cadrebbero in conseguenza l'una sull'altra.

35. *Osservazioni.* Il primo dei casi d'eguaglianza dimostrato di sopra per rapporto ai triangoli, che hanno un angolo retto, ha luogo egualmente per rapporto ai triangoli qualunque, i quali sono egnali allorchè hanno due angoli respettivamente eguali, ed un lato eguale, opposto al medesimo angolo nell' uno, e nell' altro: ma questo caso non è necessario per ciò, che viene in seguito, e resulta d'altronde da una Proposizione da dimostrarsi più abbasso (51).

Non è lo stesso a riguardo del secondo caso. Se nei trianguli ABC, e A′B′C′, *fig.* 20, si ha Fig. 20.
A = A′, AC = A′C′, BC = B′C′, che l'angolo A sia acuto, ed AC sorpassi CB, non potremo concludere che questi triangoli sieno eguali; poichè avendo abbassata nel triangolo A′B′C′ la perpendicolare C′D′, troveremo da ciascun lato di questa perpendicolare due oblique C′B, e C′B″ eguali tra loro. I triangoli C′A′B′, e C′A′B″, dei quali l'angolo A′, ed il lato A′C′ son comuni, soddisfaranno dunque alle condizioni date, ma non ve n'è che uno, che sia eguale al triangolo ABC: quello, cioè, nel quale l'angolo B′ è della medesima specie dell'angolo B, vale a dire acuto, nel caso della Figura. È d'altronde manifesto che l'angolo C′B″A′ è ottuso, poichè riposa sulla medesima retta come l'angolo C′B″B′ = C′B′B″.

TEOREMA.

36. *Allorchè due lati d'un triangolo sono eguali, gli angoli opposti a questi lati son eguali; ed allorchè i lati sono ineguali, il maggiore dei due è opposto al maggior angolo.*

Dimostrazione. Se nel triangolo ABC, *fig.* 21, Fig. 21.
i lati AB, e BC sono eguali tra loro, la perpendicolare abbassata dal punto B sul lato AC, passando per il mezzo D di questo lato (32), dividerà il triangolo ABC in due altri, i quali saranno eguali tra loro (16); poichè l'angolo retto ADB dell'uno sarà contenuto tra i lati AD, e BD respettivamente eguali ai lati DC, e BD, che contengono l'angolo retto BDC dell'altro: l'angolo A sarà dunque eguale all'angolo C.

A riguardo del triangolo ACE, nel quale i lati AE, ed EC sono eguali, è manifesto che il punto E, ove questi due lati si tagliano, dee ca-

dere fuori della perpendicolare BD, verso quella delle estremità di AC, alla qual esso è più vicino (28), ed in conseguenza nell' angolo FDC. Ciò posto, tirando BC, formeremo il triangolo ABC, gli angoli del quale BCA, e BAC saranno eguali in virtù di ciò che precede, perchè i lati opposti AB, e BC lo saranno, come oblique che si allontanano egualmente dalla perpendicolare: ma l'angolo BCA essendo interno rispetto all' angolo ECA, ne segue che quest' ultimo, opposto al lato AE, sorpassa l' angolo EAC, opposto al lato EC minore di AE.

37. *Corollario.* Resulta da ciò che, se due angoli d' un triangolo sono eguali tra loro, i lati opposti a questi angoli son pure eguali tra loro; poichè, se dessi fossero ineguali, l' angolo opposto al maggior dei due sarebbe maggiore dell' altr' angolo, lo che è contra l' ipotesi.

I medesimi ragionamenti dimostrano pure che, quando due angoli sono ineguali, il maggior de' due lati si è quello, ch' è opposto al maggior de' due angoli; poichè l' ineguaglianza degli angoli porta seco quella dei lati; e quando due lati sono ineguali, l' angolo opposto al maggior lato è sempre il maggiore.

Finalmente, quando i tre lati d' un triangolo sono eguali, i tre angoli sono eguali, e reciprocamente.

38. I triangoli, i di cui lati sono ineguali, si chiamano *scaleni;* quelli, i quali hanno due lati eguali, si chiamano *isosceli;* e quelli, di cui i tre lati sono eguali, si chiamano *equilateri.*

TEORIA DELLE PARALELLE.

39. Due rette, le quali, benchè situate nel

medesimo piano, non s' incontrano, diconsi *paralelle* tra loro.

Due rette DE, e FG, *fig.* 18, perpendicolari ad una medesima retta son dunque paralelle tra loro (33). Fig. 18.

40. *Osservazione.* Tutto ciò, che or leggeremo, riposa sulla verità delle Proposizioni seguenti, l' evidenza delle quali sembra dipendere immediatamente dalla nozione, che abbiamo data della linea retta. 1.° Se per il punto D, *fig.* 22, si conduca una retta HH', la quale faccia colla linea DB un angolo HDB minore del retto EDB, ovvero sia inclinata verso la parte FG della retta GG', essa incontrerà quest' ultima al disopra di AB allorchè saranno sufficientemente prolungate ambedue: 2.° se pel medesimo punto D si conduca la retta II', la quale faccia con DB l'angolo IDB maggiore del retto EDB, siccome dessa ferà al disotto di AB l'angolo I'DB minore del retto E'DB, essa inclinerà verso la parte FG' della retta GG', ed incontrerà in conseguenza, al disotto di AB, questa retta sufficientemente prolungata. Fig. 22.

Segue da ciò che una retta, che è perpendicolare ad un' altra, è incontrata da tutte quelle rette, che sono oblique su quest' ultima, e che non vi sono in conseguenza sopra di un piano che le rette perpendicolari ad una medesima retta, le quali non s' incontrino, ovvero che sieno paralelle tra loro (*).

(*) L' imperfezione della Teoria delle *paralelle* consiste nella difficoltà di dimostrare immediatamente questa Proposizione. Molti Autori, per arrivare a tal fine, hanno fatto degli sforzi inutili, ed altri, come

TEOREMA.

Fig. 24. 41. *Allorchè due rette* DE, *e* FG, *fig.* 24; *son perpendicolari ad una medesima retta* AB, *tutte le rette tali come* LM, *le quali son perpendicolari sopra una di esse, son nel medesimo tempo perpendicolari sull' altra.*

Dimostrazione. Supponghiamo che ciò non abbia luogo, e che LM, perpendicolare in M so-

---

Bezout, han dissimulato il vizio del ragionamento, lo che mi sembra contrario al dover rigido, che s'impone qualunque Autore d'Opere elementari di non dar mai che delle nozioni esatte, e soprattutto di farne conoscer con cura l'origine. Io ho creduto convenevole porre in evidenza questo punto delicato formando, sull'esempio d'*Euclide*, una *Domanda* o *Postulato*, che reputo più facile ad accordarsi che il suo, perchè desso presenta la difficoltà ridotta ai suoi minimi termini. (Vedete nei *Saggi sull' Insegnamento* il paragrafo degli *Elementi di Geometria*.)

Più Geometri hanno tentato di dimostrare la verità di questa *Domanda* tanto direttamente, quanto trasponendo la difficoltà: quasi tutti son caduti o in grandi prolissità, o nell' inconveniente di complicare con dei ragionamenti oscuri delle Proposizioni, la dimostrazion diretta delle quali è estremamente semplice. Si dee eccettuare frattanto da questo rimprovero la dimostrazione data dal Sig. *Bertrand*; dessa mi è sembrata la più semplice, e la più ingegnosa di tutte quelle, che conosco: eccone il fondamento.

È manifesto primieramente che, se si sommi un angolo qualunque *edh* con se stesso ripetendolo un sufficiente numero di volte, come lo dimostra la *fig.* 23, in Fig. 23. hdh', $h'dh''$, $h''dh'''$, $h'''dh''''$, arriveremo sempre a formare un angolo totale edh'''' maggiore dell'angolo retto *edb*; ma, se s'inalzano sulla retta DB le perpendicolari DE, e FG prolungate indefinitamente, formeremo una striscia indefinita EDFG, la quale non potrà riempire l'angolo retto EDB qualunque numero di volte

pra FG, non lo sia in L sopra DE; potrebbesi alzare allora per il punto L sopra LM una perpendicolare, la quale sarebbe diversa da EL, ed

---

che desso sia sommato con se stesso. Infatti, se si prende FK = DF, e si alzi KL perpendicolare sopra AB, e si pieghi in seguito la Figura lungo FG, la striscia EDFG coprirà esattamente la striscia GFKL, poichè gli angoli GFD, GFK essendo retti, la porzione DF cadrà sopra FK; e siccome DF = FK, per costruzione, il punto D si porrà sul punto K; di più, l'angolo FKL essendo retto, come pure EDF, la linea DE si porrà sopra KL. Posto ciò, poichè si possono prendere sulla retta indefinita DB tante parti eguali a DF quante ne vorremo, senza arrivare al suo termine, formerem pure un numero tanto grande quanto vorremo di striscie eguali a EDFG, senza poter coprire lo spazio indefinito compreso tra i due lati dell' angolo retto EDB. Segue da ciò che, considerate relativamente ai suoi limiti laterali, la superficie dell' angolo *edh* è maggiore di quella della striscia EDFG Se dunque si costruisce in questa striscia, sulla retta ED, un angolo EDH eguale a *edh*, desso non potrà restar contenuto tra le linee ED, e FG, onde il suo lato DH taglierà necessariamente la retta FG.

Per comprender la forza di questa dimostrazione, bisogna ben concepire che quando si applica l'angolo retto *edb* sull'angolo retto EDB, queste due superficie debbon sempre coincidere tra i loro limiti laterali *de*, e *db*, DE, e DB, per quanto lontano dessi si prolonghino: allora vedremo che, se gli angoli costrutti nelle striscie non escissero dalle medesime, dessi lascerebbero un vuoto indefinito dopo l'ultima striscia, ed un altro in ciascuna striscia: ma quest' ultimo, il quale ha sempre luogo presso il lor vertice, è più che compensato dagli spazj, che gli divengon comuni quando dessi son esciti dalle striscie, perchè i loro lati tagliandosi, essi si ricoprano in parte: tal è lo spazio MNO, comune agli angoli EDH, GFH'. Mediante questa spiegazione non dee restare, a mie

a cui EL sarebbe interna, o esterna per rapporto a FG. Stando alla Proposizione del n.° 40, EL dovrebbe incontrar GM; lo che non potrebbe succedere, poichè le rette DE, e FG essendo perpendicolari ambedue ad AB, non possono incontrarsi: non si può dunque alzare sopra LM pel punto L una perpendicolare differente da EL: così LM è perpendicolare nello stesso tempo a DE, ed a FG.

42. *Corollario.* Segue dalla Proposizion precedente che due rette paralelle a una terza son pure paralelle tra loro. Infatti qualunque retta perpendicolare su quest' ultima lo sarà ancora sulle due prime, le quali perciò, trovandosi perpendicolari ad una medesima retta, non possono incontrarsi, e sono in conseguenza paralelle tra loro.

TEOREMA.

43. *Allorchè due rette* DE, *e* FG *paralelle*
Fig. 25. *tra loro, fig.* 25, *son tagliate da una retta qualunque* 1H, *gli angoli* ELI, *e* GM1, *che desse fan con quest' ultima, da un medesimo lato, l'uno al di fuori, l'altro al di dentro, sono eguali tra loro.*

Dimostrazione. Se dal punto K, mezzo di LM, si abbassi sopra una delle rette ED, FG la perpendicolare DF, questa linea sarà nel medesimo tempo perpendicolare sull' altra (41). I triangoli DLK, e KFM saranno eguali (34), perchè i lati

---

credere, alcun dubbio sulla maniera, mercè la quale l' *Infinito* entra nelle considerazioni precedenti: ciò è piuttosto un' estensione attualmente *indefinita* che attualmente *infinita*, che bisogna supporre nei Piani.

LK, e KM, respettivamente opposti agli angoli retti D, e F, son eguali per costruzione, e di più gli angoli DKL, e MKF lo sono pure come essendo opposti al vertice : dunque l'angolo DLK, ovvero ELI è eguale a KMF, ed in conseguenza a GMI opposto al vertice rispetto a quest' ultimo.

TEOREMA.

44. *Se due rette* DE, *e* FG *fanno con una terza* IH, *e da un medesimo lato per rapporto a quest' ultima, degli angoli eguali* ELI, *e* GMI, *l' uno al di dentro, l' altro al di fuori, queste due rette saranno paralelle tra loro.*

Dimostrazione. Se dal punto K, mezzo di LM, si abbassi su DE la perpendicolare DF, formeremo i triangoli DLK, e MKF eguali tra loro (18); perchè, stante l' ipotesi, l'angolo DLK, ovvero ELI è eguale all'angolo KMF opposto al vertice riguardo all'angolo GMI, l' angolo DKL è eguale a MKF, come suo opposto al vertice, e finalmente il lato LK è eguale a KM, per costruzione. L'angolo KFM sarà dunque eguale a LDK, ed in conseguenza retto. Così le due rette DE, e FG essendo perpendicolari alla medesima retta DF, saranno paralelle tra loro.

45. *Osservazioni.* L' uso frequente, che si fa delle proprietà delle paralelle, ha condotto i Geometri a denotare con dei nomi particolari i differenti angoli, che desse fanno con le rette, le qnali le tagliano; rette, che per questa ragione son dette *secanti.*

Gli angoli tali, come ELI, GMI, *fig.* 26, situati da un medesimo lato della *secante* IH, e di cui l'apertura è volta dalla medesima parte, si chiamano *angoli corrispondenti.* Fig. 26

Gli angoli **DLM**, **FMI** son pure degli angoli *corrispondenti.*

Tutti gli angoli, l'apertura de' quali è tra le paralelle, son compresi nella denominazion generale d'*angoli interni;* e tutti quelli, l'apertura de' quali è al di fuori, si chiamano *angoli esterni.*

Si distinguono in seguito questi medesimi angoli per la lor posizione relativamente alla *secante.* Quelli, che sono da un medesimo lato per rapporto a questa retta, sono degli *angoli interni,* ovvero degli *angoli esterni da un medesimo lato.*

ELM, **GML** son due *angoli interni* dal medesimo lato.

HLD, **IMF** son due *angoli esterni* dal medesimo lato.

Gli angoli, che sono in una situazione opposta, tanto per rapporto alla secante, che per rapporto alle paralelle, si chiamano *angoli alterni.* Vi son degli *angoli alterni interni*, come **ELM**, e **FML**, ovvero **DLM**, e **GML**, e degli *angoli alterni esterni*, come **HLD**, e **GMI**, ovvero **HLE**, e **FMI**.

TEOREMA.

46. *Allorchè due paralelle* **DE**, *e* **GF** *son tagliate da una terza retta* **IH**,

1. *Gli angoli corrispondenti sono eguali;*

2.° *Gli angoli alterni interni sono eguali;*

3.° *Gli angoli alterni esterni sono eguali;*

4.° *Gli angoli interni da un medesimo lato, riuniti, fanno due angoli retti;*

5.° *Gli angoli esterni da un medesimo lato, riuniti, formano due angoli retti;*

6.° *Allorchè una di queste proprietà ha luogo, le rette* **DE**, *e* **FG** *son necessariamente paralelle.*

Dimostrazione, 1.° L'eguaglianza degli *angoli corrispondenti* non è altra cosa che il Teorema del n.° 43, poichè gli angoli ELI, e GMI, *fig.* 25, Fig. 25. sono evidentemente degli *angoli corrispondenti*, stando al senso attaccato a questa parola. L'eguaguaglianza di questi due angoli essendo dimostrata, se ne deduce immediatamente quella di tutti gli altri angoli *corrispondenti*. Quanto agli angoli DLM, e FMI, per esempio *fig.* 26, osserveremo Fig. 26. che la somma degli angoli DLM, ed ELI, i quali riposano sulla medesima retta DE, è eguale a due retti (11); che, per la medesima ragione, la somma degli angoli FMI, e GMI è pur eguale a due retti. Togliendo da queste somme eguali gli angoli eguali ELI, e GMI, gli angoli restanti DLM, e FMI saranno necessariamente eguali.

2.° L'eguaglianza degli angoli *alterni interni*, per esempio, quella di ELI, FMH, ha luogo perchè IMH è eguale a GMI, suo opposto al vertice, e quest'ultimo è eguale a ELI, come *corrispondente*; i due angoli ELI, e FMH essendo eguali ad un terzo GMI, son dunque eguali tra loro. Ragionando in una maniera simile, riconoscerebbesi l'eguaglianza degli angoli DLI, e GMH.

3.° L'eguaglianza degli angoli *alterni esterni* quella di DLH, e GMI, per esempio, ha luogo perhè GMI, essendo opposto al vertice a FMH, gli è eguale, e quest'ultimo angolo è eguale a DLH, come *corrispondente*: i due angoli DLH, e GMI essendo dunque eguali ad un terzo FMH, sono eguali tra loro. Nella stessa maniera dimostrerebbesi l'eguaglianza de' due angoli ELH, FMI.

4.° Gli angoli *interni da un medesimo lato*, ELI, e GMH, per esempio, presi insieme equi-

valgono a due retti, perchè ELI, e GMI sono eguali, come *corrispondenti*, e perchè la somma degli angoli GMI, e GMH, i quali riposano sulla medesima retta HI, essendo eguale a due retti (11), se sostituiscasi a GMI il suo eguale ELI, la somma degli angoli ELI, e GMH resterà la medesima di quella degli angoli GMI, e GMH, e sarà in conseguenza eguale a due retti.

5.° Gli angoli *esterni dal medesimo lato*, ELH e GMI, per esempio, presi insieme equivalgono a due retti, perchè gli angoli GMI, ed ELM sono eguali come *corrispondenti*, e perchè la somma degli angoli ELM, ed ELH, i quali riposano sulla medesima retta IH, essendo eguale a due retti (11), se si sostituisca all' angolo ELM il suo eguale GMI, la somma degli angoli GMI, ed ELH sarà la medesima che la precedente, e in conseguenza eguale ancora a due angoli retti.

6.° Finalmente, allorchè una qualunque di queste proprietà ha luogo, le rette DE, e FG son paralelle; perchè, se sia l' eguaglianza degli angoli *corrispondenti*, che si vede immediatamente, segue dal n.° 44 che questa eguaglianza porta necessariamente il paralellismo; e quanto alle altre quattro proprietà serve osservare che si conclude da ciascuna di esse l' eguaglianza degli angoli *corrispondenti*.

Infatti gli angoli *alterni interni* ELI, e FMH non posson essere eguali senza che l' angolo GMI, eguale a FMH, come suo opposto al vertice, non lo sia in conseguenza a ELI: dunque in questo caso gli angoli *corrispondenti* ELI, e GMI son eguali.

Lo stesso succede a riguardo degli angoli *alterni esterni* ELH, e FMI; poichè FMI, e GMH

essendo

essendo eguali, come opposti al vertice, GMH si trova pur eguale al suo corrispondente ELH.

Quando si sa che la somma degli angoli interni, o esterni dal medesimo lato è eguale a due retti ci assicuriamo, nel modo che segue, che gli angoli corrispondenti sono eguali. Se, per esempio, la somma degli angoli ELI, e GMH è eguale a due retti, l'angolo ELI sarà eguale a due angoli retti meno l'angolo GMH; ma perchè i due angoli GMH, e GMI, i quali riposano sopra una medesima retta, equivalgono insieme a due retti, l'angolo GMI sarà pure eguale a due angoli retti meno l'angolo GMH, ed in conseguenza eguale al suo corrispondente ELI, che ha il valore medesimo. Ragionerebbesi nella stessa maniera per gli angoli esterni da un modesimo lato.

47. *Corollario.* Poichè due linee paralelle godono sempre delle proprietà precedenti, e allorchè queste proprietà hanno luogo rispetto a due rette, queste son paralelle, segue che le rette, per le quali queste proprietà non hanno luogo, non son paralelle.

Per esempio, due rette DE, e FG, *fig.* 27, perpendicolari a due rette AB, e BC, che si tagliano, non son paralelle; poichè, se si tiri la secante IH, è visibile che la somma degli angoli EIH, e GHI interni dal medesimo lato è minore di quella de' due angoli retti EIB, GHB. Fig. 27.

PROBLEMA.

48. *Per un punto dato* C, fig 28, *condurre una retta paraiella alla retta data* AB. Fig. 28.

Soluzione. Per il punto C condurremo una retta qualunque CB, che incontri AB; poi faremo nel punto C sopra CB l'angolo BCD eguale all'

angolo ABC (23); la retta CD, ottenuta con questo metodo, sarà la paralella richiesta; poichè dessa passerà per il punto C, e considerando CB come secante, gli angoli alterni interni ABC, e BCD saranno eguali per costruzione.

PROBLEMA.

49. *Per un punto dato* C, *preso fuori d'una retta* AB, fig. 29, *condurre una retta, che faccia colla prima un angolo eguale ad un angolo dato* A'. Fig 29

Soluzione. In un punto qualunque A della retta AB faremo l'angolo DAB eguale all'angolo A' (23), e conducendo pel punto C parallellamente ad AD (n.° preced.) la retta CE, dessa farà (47) con AB un angolo CEB eguale a DAB, ed in conseguenza all' angolo dato A'.

TEOREMA.

Fig. 30. 50. *Gli angoli* ABC, DEF, fig. 30, *i quali hanno i lati paralelli, e l'apertura posta nel medesimo senso, sono eguali.*

Dimostrazione. Se si prolunghi un lato qualunque del secondo angolo, per esempio DE, fino a che desso incontri uno di quelli del primo, considerando le paralelle EF, e CH per rapporto alla secante DH, riconosceremo che gli angoli DEF, e DHC sono eguali, come corrispondenti (47); poi considerando le paralelle AB, e DH per rapporto alla secante BC, riconosceremo che gli angoli ABC, e DHC sono eguali, come corrispondenti: i due angoli DEF, e ABC essendo eguali ad un terzo DHC, saranno in conseguenza eguali tra loro.

TEOREMA.

51. *I tre angoli d'un triangolo riuniti equivalgono sempre a due angoli retti.*

Dimostrazione. Se si conduca per l' angolo **A** del triangolo qualunque ABC, *fig* 31, una retta AD paralella al lato opposto BC, gli angoli ABC, ed EAD, formati sulla secante AB, saranno eguali, come corrispondenti (47); gli angoli DAC, e ACB, alterni interni per rapporto alla secante AC, saranno pure eguali (47): dunque l' angolo EAC, composto degli angoli EAD, e DAC, sarà eguale alla somma degli angoli ABC, e ACB del triangolo proposto; ed unendo all' angolo EAC il terzo angolo CAB, avremo, intorno al punto A, e sulla retta EB tre angoli EAD, DAC, CAB equivalenti a quelli del triangolo ABC, ed eguali a due retti (10). Fig. 31.

N. B. Può esser utile rammentarsi che l'angolo EAC si chiama *angolo esterno* del triangolo ABC, e che ad esso solo equivalgono, presi insieme, i due interni opposti ABC, ACB.

52. *Corollario.* Segue dal Teorema quì sopra che quando due angoli d' un triangolo son respettivamente eguali a due angoli d' un altro triangolo, il terzo angolo dell' uno è pure eguale al terzo angolo dell' altro; poichè quest' ultimo angolo, riunito ai due primi in ciascun triangolo, compone da ambe le parti una somma eguale.

Si fa pur manifesto da ciò che un triangolo non può avere che un solo angolo retto, ed a più forte ragione non può avere che un solo angolo ottuso.

53. Si dice triangolo *rettangolo* quello, che ha un angolo retto; *acutangolo* quello, che non ha che degli angoli acuti; *ottusangolo* quello, che ha

un angolo ottuso; e le due ultime specie sono comprese sotto la denominazion generale di triangoli *obliquangoli*.

È manifesto che nel triangolo equilatero, di cui tutti gli angoli sono eguali (37), ciascun angolo è i due terzi d'un retto.

TEOREMA.

Fig. 32. 54. *Le parti* AC, *e* BD, fig. 32, *di due rette paralelle intercette tra due rette paralelle sono eguali tra loro, e reciprocamente.*

Dimostrazione. Se si tiri la retta AD, formeremo due triangoli ABD, e ACD, i quali saranno eguali; poichè, prendendo AD per secante delle paralelle AB, e CD, vedremo che gli angoli BAD, e ADC sono eguali, come alterni interni (47); riguardando in seguito la medesima retta come secante delle paralelle AC, e BD, riconosceremo che gli angoli ADB, e DAC sono eguali per la medesima ragione; di più, il lato AD essendo comune ai due triangoli ABD, e ACD, questi triangoli saranno eguali (18); i lati AC, e BD, opposti ad angoli eguali ADC, e BAD, saranno dunque eguali; lo che fa il soggetto della Proposizione. Lo stesso sarà a riguardo dei lati AB, e CD.

Reciprocamente, se le parti CD, e AB sono eguali, come pure le parti AC, e BD, i triangoli ACD, e ABD avranno i loro lati respettivamente eguali, e saranno in conseguenza eguali. L'eguaglianza degli angoli CAD, ADB alterni interni stabilirà il paralellismo delle rette AC, e DB (47); e l'eguaglianza degli angoli BAD, e CDA, quello delle rette AB, CD.

Dimostrerebbesi senza maggiore difficoltà

che le rette CD, ed AB sono eguali, e paralelle allorchè le rette AC, e BD sono eguali, e paralelle tra loro.

55. *Corollario.* La Proposizion precedente non cesserebbe d' esser vera quando ancora le rette AC, e BD fossero perpendicolari sopra AB, e CD; poichè desse sarebbero sempre paralelle tra loro; ma allora le parti AC, e BD misurando la distanza delle due rette AB, e CD, ne segue che due paralelle sono per tutto egualmente distanti l' una dall' altra.

TEOREMA.

56. *Se due rette qualunque* AF, *e* GM, fig. 33, Fig. 33. *son tagliate da un numero qualunque di paralelle* AG, BH, CI, *ec. condotte da dei punti presi a distanze eguali sulla prima, le parti* GH, HI, IK, *ec. della seconda saranno pure eguali tra loro.*

Dimostrazione. Conducendo pei punti G, H, I, ec. le rette GN, HO, IP, ec. paralelle ad AF, si formano i triangoli GNH, HOI, IPK, ec., nei quali i lati NG, OH, IP, ec. essendo respettivamente eguali ad AB, BC, CD, ec., come paralelle comprese tra paralelle (54), sono eguali tra loro. Gli angoli NGH, OHI, PIK, ec. sono eguali, come corrispondenti per rapporto alla secante GM; e finalmente gli angoli GNH, HOI, IPK, ec sono eguali, perchè dessi hanno i lati paralelli, e l' apertura posta nel medesimo senso (50). Questi triangoli avendo dunque un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali, sono eguali (18); dal che ne segue che i lati GH, HI, IK; ec. lo sono pure.

57. *Corollario.* Resulta da ciò, che precede, che AB è contenuto in AF tante volte quante GH

lo è in GM; di maniera che si ha questa proporzione

$$AB : AF :: GH : GM,$$

la quale può cangiarsi in quest'altra

$$AB : GH :: AF : GM;$$

e da quest'ultima ricavasi

$$2AB : 2GH :: AF : GM,$$
$$3AB : 3GH :: AF : GM,$$
ec.,

vale a dire che un numero qualunque di parti di AF sta ad un egual numero di parti di GM, come la retta intera AF sta alla retta intera GM.

TEOREMA.

Fig. 34. 58. *Tre paralelle* AG, DK, FM, fig. 34, *tagliano sempre due rette qualunque* AF, *e* GM *in parti proporzionali, ovvero in modo che si ha*

$$AD : DF :: GK : KM.$$

Dimostrazione. Posson succeder due casi: 1.° che AD sia *commensurabile* con AF, vale a dire, che il rapporto di AD ad AF possa esprimersi esattamente con due numeri. Suppongo, per esempio, che si abbia

$$AF : AD :: 47 : 25;$$

se si concepisca la retta AF divisa in 47 parti eguali, AD ne conterrà 25, e DF 22. Conducendo in seguito per tutti i punti di divisione delle paralelle ad AG, la retta GM si troverà divisa in 47 parti eguali, 25 delle quali comporranno GK, e 22 comporranno KM; avrem dunque

$$AD : DF :: 25 : 22,$$
$$GK : KM :: 25 : 22,$$

di dove ne segue

AD : DF :: GK : KM.

Di più, a motivo delle proporzioni

AF : AD :: 47 : 25,

GM : GK :: 47 : 25,

otterremo pure

AF : AD :: GM : GK.

2.° Se AF, ed AD sono *incommensurabili*, dimostreremo, nel modo seguente, che il loro rapporto non può essere nè minore nè maggiore di quello di GM a GK.

Sia in primo luogo

AF : AD :: GM : GI,

GI essendo minore di GK. Si può sempre dividere il lato AF in parti tanto piccole da far sì che conducendo per tutti i punti di divisione delle paralelle a FM, ne passi una *de* tra i punti I, e K; avremo, dietro a ciò che precede, a motivo della *commensurabilità* di AF rispetto ad A*d*,

AF : A*d* :: GM : G*e*.

Gli antecedenti di questa proporzione essendo i medesimi che quelli della precedente, ne concluderemo questa nuova proporzione tra i conseguenti dell' una, e dell'altra

AD : A*d* :: GI : G*e*;

resultato assurdo, poichè AD essendo maggiore di A*d*, GI è minore di G*e*.

Non si può avere neppure

AF : AD :: GM : GI′,

GI′ essendo maggiore di GK; poichè avendo diviso AF in modo che una delle paralelle *d′ e′* cada tra i punti K, e I′, avremo

AF : A*d′* :: GM : G*e′*.

Facendo una nuova proporzione tra i conseguenti di quest' ultima, e quelli della precedente, avremo

$$AD : Ad' :: GI' : Ge';$$

resultato parimente assurdo, poichè AD essendo minore di Ad', GI' è maggiore di Ge'. Bisogna dunque necessariamente che il quarto termine della proporzione formata dalle rette AF, AD, GM, sia GK.

Ricavasi dalla proporzione AF : AD :: GM : GK

$$AF - AD : AD :: GM - GK : GK,$$

oppure $$DF : AD :: KM : GK.$$

o vero finalmente AD : DF :: GK : KM,

rovesciando i due rapporti (*)

59. 1 *Corollario.* Se pel punto G si tiri la retta GN paralella ad AF, avremo

$$GO = AD, \; ON = DF \; (54);$$

(*)Incontreremo forse qualche difficoltà nel riportare alle parti dell' estensione la nozion dei rapporti tale com' essa si concepisce nei numeri, soprattutto allorchè si tratterà di linee *incommensurabili* tra loro: ma sparirà l' oscurità se si faccia attenzione che non si posson paragonare due linee se non che supponendole riportate ad una misura comune (5), e che allora il loro rapporto è veramente un numero, o una frazione, i cui termini sono espressi dai numeri di misure comuni comprese in ciascuna retta. Benchè questa frazione cessi d' essere rigorosamente assegnabile nel caso ove il rapporto sia *incommensurabile*, dessa esiste sempre, poichè possiamo approssimarci alla medesima tanto quanto vorremo; e due rapporti *incommensurabili* dovranno essere riguardati come eguali allorchè proveremo che, per quanto lontano spingasi l' approssimazione per l' uno, e per l' altro, la loro differenza resterà sempre nulla.

e mediante ciò che precede

$$GO : ON :: GK : KM,$$
$$GO : GN :: GK : GM.$$

Se dunque conducasi in un triangolo una retta OK paralella ad uno dei lati NM, gli altri due lati GN, e GM saranno tagliati in parti proporzionali da questa retta.

60. 2.° *Corollario.* Reciprocamente, allorchè una retta taglia due lati d'un triangolo in parti proporzionali, dessa è paralella al terzo.

Infatti, se nel triangolo ABC, *fig.* 35, si avesse Fig 35.

$$AB : Ae :: AC : Af,$$

e la linea *ef* non fosse paralella a BC, potrebbesi condurre pel punto *e* una retta *e*H paralella a BC, la quale darebbe

$$AB : Ae :: AC : AH \ (59);$$

proporzione, di cui i tre primi termini sono i medesimi di quelli della precedente: ne segue dunque che $AH = Af$, che in conseguenza le rette *ef*, *e*H si confondono, e che la prima è necessariamente paralella *a* BC.

61. 3.° *Corollario.* La retta BD, *fig.* 36, la quale divide in due parti eguali uno degli angoli B d'un triangolo qualunque ABC, divide il lato opposto AC in due segmenti proporzionali ai lati adiacenti, vale a dire, si ha la proporzione Fig. 36.

$$AD : DC :: AB : BC.$$

Ciò si dimostra conducendo CE paralella a BD, che incontri in E la retta AB prolungata. Ne resulta, pel n.° 59,

$$AD : DC :: AB : BE;$$

di più il triangolo CBE è isoscele, poichè l'angolo

BCE è eguale a CBD, come alterno interno per rapporto alla secante BC; l' angolo BEC lo è all' angolo ABD, come corrispondente per rapporto alla secante AE; e gli angoli ABD, e CBD sono eguali, come metà del medesimo angolo ABC: dunque gli angoli BCE, e BEC lo son pure; dunque BE è eguale a BC (37); dunque finalmente AD : DC :: AB : BC.

PROBLEMA.

62. *Trovare una quarta proporzionale a tre linee rette date* M, N, P, fig. 37, *ovvero il quarto termine di questa proporzione* Fig. 37.

M : N :: P : x.

Soluzione. Tireremo due rette indefinite AB, e AC, che faciano tra loro un angolo qualunque; prenderemo sulla prima, da A in B, una distanza AB eguale a M, e da A in D una distanza eguale a N; poi porteremo sulla seconda da A in C la terza retta P. Uniremo con una retta i punti B, e C, e tirando per il punto D, paralellamente a BC, la retta DE, avremo in AE la quarta proporzionale richiesta; poichè

AB : AD :: AC : AE (59),

la qual somministra

M : N :: P : AE.

Se le due rette N, e P fossero eguali tra loro, la linea AE, data dalla proporzione

M : N :: N : AE,

sarebbe quella, che i Geometri hanno chiamata *terza proporzionale*. La costruzione di questo caso non differisce da quella del precedente; il punto C cade allora in *c*, e la retta De paralella a Bc

taglia sopra AC la parte Ae eguale alla terza proporzionale cercata; poichè si ha

$$AB : AD :: Ac : Ae,$$

ovvero $M : N :: N : Ae.$

63. Due triangoli sono *simili* allorchè gli angoli dell' uno sono respettivamente eguali agli angoli dell' altro, ed i lati, i quali nell' uno, e nell' altro son opposti ad angoli eguali, e che per questa ragione diconsi *lati omologhi*, sono proporzionali.

Queste due condizioni son collegate tra loro in modo che una porta sempre seco l' altra.

TEOREMA.

64. *Allorchè due triangoli* ABC, *ed* EDF, fig 38, *hanno i loro angoli respettivamente eguali,* Fig. 38
i loro lati omologhi sono proporzionali, ed i detti triangoli sono in conseguenza simili.

Dimostrazione. Se si prendano sopra AB, ed AC due parti Ae, e *Af* respettivamente eguali a DE, ed a DF, e si tiri *ef*, i triangoli *eAf*, ed EDF saranno eguali; poichè, per ipotesi, l'angolo A dell' uno è eguale all' angolo D dell' altro, ed i lati Ae, ed *Af* sono eguali a DE, ed a DF per costruzione (16). L' angolo *Aef* essendo eguale a E, lo sarà in conseguenza a B, ed *ef* sarà paralella a BC; avremo dunque la proporzione

$$Ae : AB :: Af : AC \ (59),$$

ovvero $DE : AB :: DF : AC.$

Tirando in seguito *Gf* paralellamente ad AB, otterremo

$$Af : AC :: BG : BC,$$

ovvero $DF : AC :: EF : BC;$

poichè BG è eguale ad *ef* (34), la qual è eguale

ad EF. Riunendo quest'ultima proporzion colla prima mediante il rapporto DF : AC, il quale è comune all' una, ed all' altra, avremo questa serie di rapporti eguali

DE : AB :: DF : AC :: EF : BC,

dalla quale resulta che i *lati omologhi* dei triangoli ABC, DEF son proporzionali tra loro.

65. *Corollario.* Segúe dalla Proposizion precedente che due triangoli sono simili 1.° allorchè dessi hanno solamente due angoli respettivamente eguali, poichè il terzo angolo dell' uno è necessariamente eguale al terzo angolo dell' altro (52);

2.° Allorchè i loro lati son respettivamente paralelli;

3.° Allorchè i loro lati son respettivamente perpendicolari.

La seconda parte si manifesta dai triangoli posti come ABC, e DEF; poichè gli angoli tali come A, e D, i quali hanno la loro apertura volta nel medesimo senso, sono eguali (50).

A riguardo dei triangoli posti in una situa-
Fig. 39. zione rovescia, come lo dimostra la *fig.* 39, se si prolunghi il lato EF del triangolo DEF in modo che desso ne tagli due del triangolo ABC in G, ed in H, gli angoli AGH, e DEF saranno eguali, come alterni esterni per rapporto alle paralelle AB, DE, ed alla secante FH; gli angoli AHG, e DFE lo saran pure, come alterni interni per rapporto alle paralelle AC, DF; ed il triangolo EDF sarà in conseguenza simile al triangolo AGH, il quale sarà egli stesso simile al triangolo ABC, poichè gli angoli AHG, ed AGH son eguali agli angoli ACB, ABC, come corrispondenti per rapporto alle paralelle GH, BC, ed alle secanti AC, AB.

È manifesto che i lati *omologhi* nel caso attuale son paralelli tra loro.

Per dimostrar l'ultima parte, sieno i due triangoli ABC, e DEF, *fig.* 40, posti in modo che il lato EF sia perpendicolare sopra BC prolungato, DF prolungato lo sia sopra AC, e finalmente DE prolungato lo sia sopra AB; pel punto A, opposto al lato BC perpendicolare sopra EF, condurremo le rette AG, e AH respettivamente paralelle ai due altri lati DF, e DE del triangolo DEF, ed in conseguenza perpendicolari una sopra AC, l'altra sopra AB. Gli angoli CAG, e BAH saranno retti secondo l'ipotesi; se si sommi con ciascuno il medesimo angolo CAH, i due angoli resultanti BAC, e GAH saranno eguali; ma gli angoli GAH, ed EDF avendo per costruzione i lor lati paralelli, e la loro apertura volta nel medesimo senso, sono eguali: l'angolo BAC sarà dunque eguale ad EDF. Fig. 40.

Conducendo in seguito pel punto B le rette BI, e BK paralelle ai lati EF, e DE, formeremo gli angoli retti CBI, e ABK, dai quali togliendo una parte comune ABI, resteranno gli angoli eguali ABC, IBK; ed il secondo essendo eguale a DEF, a motivo del paralellismo delle rette BI, e EF, BK, e DE, ne concluderemo che ABC è pur eguale a DEF. I triangoli ABC, e DEF, avendo due angoli respettivamente eguali, sono in conseguenza simili.

Si vede di più che i lati *omologhi* sono quelli, i quali son respettivamente perpendicolari; poichè l'angolo D essendo eguale all'angolo A, il lato EF è *omologo* a BC; e così degli altri.

TEOREMA.

66. *Due triangoli sono simili allorchè hanno*

un angolo scambievolmente eguale contenuto tra lati proporzionali.

Dimostrazione. Se l'angolo A del triangolo
Fig. 38. ABC *fig.* 38, è eguale all'angolo D del triangolo DEF, e si abbia AB : DE :: AC : DF, prenderemo sui lati AB, e AC del primo triangolo due parti Ae . ed Af respettivamente eguali a DE, ed a DF. Tirando *ef*, formeremo il triangolo A*ef* eguale al triangolo DEF (16); e la retta *ef* tagliando i lati del triangolo BAC in parti proporzionali, poichè avremo

AB : DE, ovvero *Ae* :: AC : DF, ovvero A*f*,

sarà paralella a BC (60). Gli angoli *e*, ed *f* respettivamente eguali agli angoli E, e F, lo saranno pure agli angoli B, e C: ed in conseguenza i triangoli ABC, e DEF, avendo i loro angoli eguali, saranno simili. (64).

TEOREMA.

67. *Due triangoli, i quali hanno i lati respettivamente proporzionali, son simili.*

Dimostrazione. Siavi ne'triangoli ABC, DEF questa serie di rapporti eguali

AB : DE :: AC : DF :: BC : EF.

Se si prenda sopra AB una parte Ae eguale a DE, e si conduca una retta *ef* paralella a BC, i triangoli ABC, ed A*ef*, simili tra loro (65), daranno

AB : Ae :: AC : A*f* :: BC : *ef*;

ma perchè Ae è eguale a DE, tutti i rapporti della seconda serie saranno eguali a quelli della prima; e siccome gli antecedenti sono i medesimi da ambe le parti, i conseguenti saranno pure i medesimi: avremo dunque

A*f* = DF, *ef* = EF.

Segue da ciò che il triangolo DEF è eguale al triangolo A*ef*; e siccome quest' ultimo è simile al triangolo ABC, sarà lo stesso anco a riguardo del primo.

PROBLEMA.

68. *Costruire sopra una retta data* EF *un triangolo simile al triangolo* ABC.

Soluzione. Si può costruire un triangolo simile ad un altro partendo dai diversi caratteri, mercè dei quali la similitudine di queste Figure può essere stabilita. Se si voglia dunque formare sulla retta data EF un triangolo, il quale sia simile al triangolo ABC, vi si può pervenire 1.° conducendo pei punti E, e F due rette, le quali facciano con EF degli angoli E, e F respettivamente eguali agli angoli B, e C (65):

2.° Facendo nel punto E sopra EF un angolo eguale all' angolo B, e portando sul lato DE di quest' angolo una distanza DE quarta proporzionale alle tre linee BC, EF, AB; in questa maniera i due triangoli saranno pure simili, come aventi un angolo respettivamente eguale contenuto tra lati proporzionali (66):

3.° Finalmente cercando una quarta proporzionale alle tre linee BC, EF, AB, un' altra alle tre linee BC, EF, e AC, e costruendo sulle due linee trovate, e sopra EF un triangolo DEF; i triangoli DEF, e ABC saranno simili, come aventi i loro lati proporzionali (67).

TEOREMA.

69. *Tante rette* AB, AC, AD, AE, AF *quante vorremo*, fig. 41, *condotte da un medesimo punto* A, *ed incontrate da due paralelle* GL, Fig. 41.

e BF, *son tagliate da queste paralelle in parti proporzionali, e le tagliano pure in parti proporzionali.*

Dimostrazione. I triangoli BAC, GAH essendo simili (65), si ha per questi triangoli

AB : AG :: AC : AH :: BC : GH;

pei triangoli CAD, e HAI

AC : AH :: AD : AI :: CD : HI;

pei triangoli DAE, e IAK

AD : AI :: AE : AK :: DE : IK;

pei triangoli EAF, e KAL

AE : AK :: AF : AL :: EF : KL.

Tutti questi rapporti sono eguali, poichè il secondo di ciascuna serie è il primo di quella, che ne vien dopo. Non prendendo in primo luogo che quelli, i quali contengon le linee condotte dal punto A, avremo

AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: AE : AK :: AF : AL;

poi riunendo quelli, i quali contengon le parti delle paralelle BF, e GL, otterremo

BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EF : KL;

lo che fa vedere che queste linee sono tagliate in parti proporzionali.

Considerando i triangoli BAC, CAD, DAE, EAF come aventi due dei loro lati tagliati da una retta paralella al terzo, si ha (59)

AG : BG :: AH : HC,
AH : HI :: AI : ID,
AI : ID :: AK : KE,
AK : KE :: AL : LF,

di

di dove ricavasi

AG : BG :: AH : HC :: AI : ID :: AK : KE :: AL : LF,

e d'onde resulta che le rette AB, AC, AD, AE, AF son tagliate in parti proporzionali.

PROBLEMA.

70. *Dividere una retta data nella stessa maniera, nella quale è stata divisa un' altra.*

Soluzione. Sieno *gl* la linea da dividersi, e BF la linea digià divisa. Descriveremo su quest' ultima un triangolo BAF, i di cui tre lati sieno eguali, il che si effettuerà seguendo il metodo del n.° 21, prendendo la linea stessa BF per raggio dei due Circoli da descriversi dai punti B, e F come centri; portando in seguito *gl* da A in G sul lato AB, e da A in L sul lato AF, tireremo GL : le rette, che uniranno i punti C, D, E col punto A, taglieranno la linea GL in parti proporzionali a quelle di BF, come lo domanda l'enunciato del Problema.

Infatti, poichè AB = AF, AG = AL, si ha la proporzione evidente

AB : AG :: AF : AL,

dalla quale resulta (60) che GL è paralella a BF. Il triangolo GAL essendo dunque simile a BAF, darà questa proporzione

AB : AG :: BF : GL;

e siccome, per costruzione, BF = AB, avremo necessariamente GL = AG = *gl*. Ciò premesso, dietro al precedente Teorema, le rette paralelle GL, e BF son divise in parti proporzionali, ovvero l'una è divisa come l'altra.

Se la linea da dividersi fosse *g' l'* maggiore di BF, bisognerebbe prolungare indefinitamente i

lati AB, e AF al disotto di BF; portando in seguito $g'l'$ sopra AB da A in G', e sopra AF da A in L', si tirerebbe G'L', ed i prolungamenti delle rette AC, AD, AE dividerebbero G'L' nei punti H', I', K' in parti proporzionali a quelle di BF.

71. *Osservazione.* Il precedente Problema può risolversi ancora nel modo seguente.

Fig. 42. Sia AH, *fig.* 42, la retta da dividersi. Tireremo pel punto A una retta indefinita AP, che faccia con AH un angolo qualunque PAH, sulla qual porteremo in seguito le une dopo l'altre, le parti, nelle quali è divisa la linea, le cui divisioni son cognite: uniremo l'estremità P dell'ultima con l'estremità H della linea da dividersi; poi pei punti I, K, L, M, N, ed O condurremo paralellamente a PH le rette IB, KC, LD, ME, NF, OG, le quali taglieranno AH in parti proporzionali a quelle di AP.

Quest'ultimo metodo si dimostra osservando che nel triangolo ACK, i di cui lati AC, e AK son tagliati da BI paralella al terzo lato CK, si ha (59)

$$AB : AI :: AC : AK :: BC : IK;$$

il triangolo ADL, considerato per rapporto alla retta CK, somministra

$$AC : AK :: AD : AL :: CD : KL;$$

il triangolo AEM, considerato per rapporto alla retta LD, somministra

$$AD : AL :: AE : AM :: DE : LM;$$

e così degli altri. Tutte queste serie di rapporti eguali si concatenano per mezzo del secondo rapporto di ciascheduna, il quale si trova per primo in quella, che ne vien dopo; non prendendo dunque

che i rapporti, i quali contengono le divisioni della retta AP, avremo

AB : AI :: BC : IK :: CD : KL :: DE : LM, ec.;

il che dimostra che le parti AB, BC, CD, ec. di AH son proporzionali alle parti AI, IK, KL, ec. di AP.

Semplicizzasi un poco quest' ultimo metodo conducendo pel punto H una linea QH paralella ad AP, sulla quale si prendono, principiando dal punto H, delle parti HX, XV, VU, UT ec. respettivamente eguali a PO, ON, NM, ML, ec.; le rette PH, OX, NV, ec., le quali uniranno i punti di divisione corrispondenti, essendo paralelle (54), taglierano la retta AH in parti proporzionali a quelle di AP, ovvero di HQ.

72. 1.° *Corollario.* Se nella *fig.* 41 le parti della retta BF, e nella *fig.* 42 quelle di AP fossero eguali tra loro, quelle della retta GL nella prima, e della retta AH nella seconda sarebbero pure eguali tra loro.

Segue da ciò che il metodo del n.° 70, e quello del n.° 71 posson servire a dividere una retta in un numero qualunque di parti eguali. Fa di mestieri perciò riguardare primieramente la retta BF, *fig.* 41, come indefinita; poi, pren- Fig. 41.
dendo su questa retta una parte BC d'una grandezza arbitraria, portarla in seguito, o ripeterla dietro dietro un numero di volte eguale a quello delle parti, nelle quali la retta data GL debb' esser divisa; il punto F, ove si termineran queste parti, sarà l' estremità della linea BF, e finiremo la costruzione come nel n.° 70.

Col metodo del n.° 71, fa di mestieri portar successivamente sulla retta AP, *fig.* 42, conside- Fig. 42.

rata come indefinita, le parti eguali, ed arbitrarie, poichè AH rappresenta la linea data.

73. 2.° *Corollario.* La division delle rette in parti eguali è il fondamento della costruzion delle *scale*, vale a dir delle rette, le quali servono a misurare altre rette. Infatti, se si fosse primieramente divisa in parti eguali la retta CD, Fig. 3. *fig.* 3, non si sarebbe dovuto cercar altro che quante di queste parti contiene AB, per avere il rapporto di AB a CD, almeno in un modo tanto più approssimativo quanto più le parti di CD fossero state più piccole. L'imperfezione degl'Istrumenti, ed i limiti de' nostri sensi ci forzan ben presto ad arrestarci nella division delle linee, le di cui parti ci sfuggono attesa la lor piccolezza; per estendere i nostri mezzi a questo riguardo, si è immaginata la divisione col mezzo delle *trasversali*, rappresentate nella *fig.* 43, della quale Fig. 43. eccone la costruzione.

Avendo primieramente divisa la linea retta AC in un numero qualunque di parti eguali tali come BC, e volendo in seguito divider BC in un numero di parti troppo grande perchè ciascuna di quest' ultime possa essere ben distinta, condurremo sopra AC pei punti A, C le perpendicolari AA'''', e CL; prenderemo sopra AA'''' una parte arbitraria AA', la quale porteremo in seguito di sè stessa ripetendola tante volte quante saranno le parti, che vorrem contenute in BC (la Figura ne rappresenta quattro); pei punti di divisione A', A'', A''', A'''', tireremi delle rette paralelle ad AC; finalmente uniremo i punti B, ed L colla retta *trasversale* BL.

Ciò fatto, se si conduca la linea BK paralella a CL, formeremo i triangoli BDE, BFG,

BHI, BKL evidentemente simili tra loro (65) che daranno le seguenti proporzioni

$$BD : BK :: DE : KL,$$
$$BF : BK :: FG : KL,$$
$$BH : BK :: HI : KL,$$

dalle quali resulta 1.° che BD essendo $\frac{1}{4}$ di BK, DE lo sarà pure di KL, ovver di BC, ch' è egnale a KL (54); 2.° che BF essendo i $\frac{2}{4}$ ovvero $\frac{1}{2}$ di BK, FG lo è pure di KL, ovver di BC; 3.° che BH essendo i $\frac{3}{4}$ di BK, HI lo è pure di KL, ovver di BC.

Si manifesta da questo che prendendo sulla prima, sulla seconda, e sulla terza delle rette paralelle ad AB le distanze A'E, A''G, A'''I respettivamente egualiad A'D + DE, A''F + FG, A'''H + HI, avremo

$$AB + \tfrac{1}{4}BC,\ AB + \tfrac{2}{4}BC,\ AB + \tfrac{3}{4}BC.$$

Ciò serve per far vedere come si possa costruire una *scala* di trasversali per ottener delle divisioni qualunque, e l'uso che se ne possa far nella pratica.

Una simile *scala* prende il nome di *scala* dei *decimi* quando essa contiene dieci paralelle ad AB, perchè la medesima dà allora i decimi di BC.

TEOREMA.

74. *Se dall' angolo retto d' un triangolo rettangolo si abbassi una perpendicolare sul lato opposto, il quale chiamasi* ipotenusa, 1.° *questa perpendicolare dividerà il triangolo in due altri triangoli, i quali gli saranno simili, e saranno in conseguenza simili ancora tra loro.*

2.° *Essa dividerà l' ipotenusa in due parti, o segmenti tali che ciascun lato dell' angolo retto*

sarà medio proporzionale tra il segmento, che gli è adiacente, e l'ipotenusa intera.

3.° La perpendicolare sarà media proporzionale tra i due segmenti dell'ipotenusa.

Fig. 44. *Dimostrazione.* Il triangolo ABC, *fig.* 44, essendo supposto rettangolo in B, e BD essendo perpendicolare sopra AC, i triangoli ABC, e ABD saranno simili (65); poichè dessi avranno due angoli respettivamente eguali, cioè, l'angolo A, il quale è comune ad ambedue, e l'angolo retto ABC nel primo eguale all'angolo retto ADB nel secondo. Il triangolo BDC è, per la medesima ragione, simile al triangolo ABC; poichè l'angolo C è a loro comune, e l'angolo BDC dell'uno è retto, come l'angolo ABC dell'altro.

Se si paragonan succe-sivamente ciascuno de' due triangoli ABD, e BDC col triangolo ABC, osservando che gli angoli ABD, e CBD son respettivamente eguali agli augoli C, e A, troveremo tra i loro lati omologhi queste proporzioni

$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC,$$

le quali costituiscono la seconda parte della Proposizione.

Paragonando in seguito i triangoli ABD, e BCD l'uno all'altro, avremo

$$AD : BD :: BD : CD;$$

ciò che forma la terza parte dell'enunciato di sopra.

75. *Corollario.* Segue dal precedente Teorema che i tre lati d'un triangolo rettangolo essendo riportati ad una misura comune, la seconda potenza del numero, ch'esprime la lunghezza dell'ipotenusa, è eguale alla somma delle seconde

potenze de' numeri, ch'esprimono le lunghezze degli altri due lati.

Infatti le proporzioni

$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC$$

somministrano

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{AC}, \quad CD = \frac{\overline{BC}^2}{AC};$$

e sommando AD con CD, si ha

$$AC = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{AC}, \text{ ovvero } \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Segue da ciò che si può trovare l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, di cui si hanno i due altri lati. Se, per esempio, $AB=3$, $BC=4$, avremo

$\overline{AC}^2 = 9+16=25$, donde $AC=\sqrt{25}=5$.

Si può parimente trovare uno de' lati dell' angolo retto quando si conosce l'altro, e l'ipotenusa; perchè da

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ricavasi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$. Se, per esempio, $AC=13$, $BC=12$, avremo

$\overline{AB}^2 = 169 - 144 = 25$, di dove $AB=5$.

In generale $AC=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$, $AB=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}$.

TEOREMA.

76. *I tre lati d'un triangolo qualunque essendo riportati ad una misura comune, ed espressi in conseguenza da dei numeri, se dall' estremità d' uno qualunque di questi lati si abbassi una perpendicolare sopra uno degli altri due, la seconda po-*

tenza del primo sarà eguale alla somma delle seconde potenze degli ultimi meno due volte il prodotto del lato, sul quale cade la perpendicolare, per la distanza di questa perpendicolare dal vertice dell'angolo opposto al primo lato, se quest'angolo è acuto; e più due volte il prodotto medesimo, se quest'angolo è ottuso; vale a dire che avremo nel primo caso, fig. 45, e 46, Fig. 45 e 46.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

e nel secondo, fig. 47, Fig. 47.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Dimostrazione. Quando la perpendicolare CD, *fig.* 45, divide ABC in due triangoli ACD, e BCD rettangoli in D, il primo dà immediatamente, in virtù del n.° precedente, Fig. 45.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

e ricavasi dal secondo

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2.$$

Dietro a questo valore di $\overline{CD}^2$ quello di $\overline{AC}^2$ diviene

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

ma è manifesto che $AD = AB - BD$, numero, il cui quadrato è $\overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$ (*) :

(*) In questa Proposizione, dove io riguardo le linee come valutate in numeri, ho dovuto suppor cognita la composizione della seconda potenza d'un numero eguale alla somma, oppure alla differenza di due altri; composizione, alla quale si può d'altronde arrivare mediante il solo ragionamento senza il soccorso dei caratteri algebrici.

ponendo questo valore nell' espressione di $\overline{AC}^2$, avrem finalmente

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

ciò che riducesi a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Nella Figura 46, ove la perpendicolare cade fuor del triangolo, la differenza consiste in ciò che Fig. 46.

$$AD = BD - AB;$$

ma si ha sempre per il quadrato

$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2;$$

così $\overline{AC}^2$ ha il medesimo valore che sopra : ecco il primo caso del Teorema.

Allorchè il lato AC, *fig.* 47, è opposto ad un angolo ottuso, la perpendicolare cadendo ne- Fig. 47.
cessariamente fuor del triangolo ABC, si trova pure, pei triangoli ACD, e BCD rettangoli in D,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,\ \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

di dove concludesi

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

ma si ha $AD = AB + BD$, valore, il cui quadrato è $\overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$, e dal quale risulta

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

il che riducesi a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD};$$

tal è il secondo caso dell' enunciato.

N. B. Le parti AD, e BD, determinate sul lato AB dalla perpendicolar e CD, si dicon *segmenti*.

77. *Corollario.* Ravvicinando questo Teorema al precedente, concluderemo che si può, allorchè conosconsi i tre lati d'un triangolo, determinare se l'angolo opposto ad uno qualunque di questi lati è acuto, retto, oppure ottuso. Infatti nel primo caso, ove $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD}$, è manifesto che la seconda potenza di AC è minore della somma di quelle degli altri due lati AB, e BC. Nel secondo caso, l'angolo B essendo retto, si ha solamente

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2;$$

così la seconda potenza di AC è eguale alla somma di quelle degli altri due lati: nel terzo caso finalmente, ove si ha $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD}$, la seconda potenza di AC sorpassa la somma di quelle degli altri due lati.

Queste osservazioni essendo applicate al triangolo, i cui lati son espressi da 5, 7, 8, e le loro seconde potenze da 25, 49, 64, ne risulta che l'angolo opposto al lato 8 è acuto; poichè la seconda potenza di questo lato essendo 64, si trova minore della somma 74 delle seconde potenze de' due altri lati.

È bene osservare che la specie dell'angolo opposto al maggior lato farà conoscere altresì quella del triangolo (53).

DEI POLIGONI.

78. Le superficie piane terminate da un numero qualunque di linee rette si dicon *poligoni*. Il più semplice di tutti è il *triangolo*. I poligoni di quattro lati si dicono in generale *quadrilateri*; di cinque, *pentagoni*;

di sei, *esagoni;*
di sette, *ettagoni;*
di otto, *ottagoni;*
di nove, *enneagoni;*
di dieci, *decagoni;*
ec.

Non si spinge mai questa denominazione al di là del poligono di dieci lati se non che pel *dodecagono*, poligono di dodici lati, e pel *pentadecagono*, che n'ha quindici.

Nelle Figure 48, e 49 ABCDEF rappresenta un poligono di sei lati, ovvero un *esagono*. Tutti gli angoli della prima Figura avendo la loro apertura al didentro del poligono, sono degli angoli *salienti*; l'angolo DEF della Figura 49 è un angolo *rientrante*, perchè desso ha la sua apertura al difuori del poligono Fig. 48 e 49.

Le linee tali, come CA, CF, ec., tirate tra degli angoli d'un *poligono*, i quali non sono adiacenti ad un medesimo lato, si dicono *diagonali.*

79. Tra i quadrilateri, o poligoni di quattro lati, si denota particolarmente sotto il nome di *paralellogrammo* quello, i cui lati opposti son paralelli. ABCD, *fig.* 50, è un paralellogrammo. Fig. 50.

Segue dal n.° 54. 1.° che ciascuna diagonale AC, e BD divide il paralellogrammo in due triangoli eguali:

2.° Che i lati opposti AB, e DC, AD, e BC d'un paralellogrammo son respettivamente eguali:

3.° Che reciprocamente, se i lati opposti d'una Figura di quattro lati sono eguali, come pure se due lati opposti sono eguali, e paralelli, questa Figura è un paralellogrammo.

TEOREMA.

80. *Le due diagonali* AC, *e* BD *d'un parallellogrammo si tagliano scambievolmente in due parti eguali.*

Dimostrazione. I triangoli AOD, e BOC son eguali (18), poichè i lati AD, e BC sono eguali per l'ipotesi; gli angoli DAO, OCB sono eguali come alterni interni per rapporto alla secante AC, ed alle paralelle AD, BC; e gli angoli ADO, e OBC lo son pure, come alterni interni per rapporto alla secante BD: dunque AO=OC, DO=OB.

TEOREMA.

81. *Unendo uno degli angoli d'un poligono con tutti gli altri, si divide questo poligono in un numero di triangoli eguale a quello de' suoi lati diminuito di due unità.*

Dimostrazione. Questa Proposizione è quasi
Fig. 48. evidente mediante l'ispezione della Fig. 48, ove si vede che le diagonali CA, CF, CE condotte dall'angolo C agli angoli A, F, ed E dividono il poligono ABCDEF, di sei lati, in quattro triangoli ACB, ACF, FCE, ECD. Ci convinceremo che la medesima Proposizione conviene a un poligono d'un numero qualunque di lati osservando che i due triangoli estremi, tali come ACB, ECD, tra i quali saranno compresi tutti quelli, che può contenere il proposto poligono, conterranno ciascuno due de' suoi lati, mentrechè tutti gli altri non ne conterranno che un solo. Vi saran dunque in questi due triangoli quattro lati del poligono; il numero de' triangoli intermedj sarà in conseguenza eguale a quello dei lati del poligono diminuito di quattro; ed il numero totale de' triangoli sarà, come lo porta l'enunciato, eguale a

quello dei lati del poligono diminuito di due unità.

82. *Corollario.* Segue da ciò che la somma di tutti gli angoli interni ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB d' un poligono equivale a tante volte due retti quanti sono i suoi lati men due; perchè questa somma si compone di quelle degli angoli di tutti i triangoli ACB, ACF, FCE, ECD, le quali equivalgono ciascuna a due retti, e perchè il poligono contiene un numero di questi triangoli eguale a quello de' suoi lati diminuito di due unità.

Nella Figura 49 l' angolo rientrante DEF è esterno, e non interno. Facendo partire le diagonali dal vertice E di quest' angolo, si vede evidentemente che desso è rimpiazzato, nella somma degli angoli interni, da quella degli angoli DEC, CEB, BEA, AEF, e che riunito a quest' ultima, forma quattro retti (13). Fig. 49

TEOREMA.

83. *Se si prolungano nel medesimo senso, come nel primo poligono della Figura* 48, *tutti i lati d' un poligono, il quale non abbia angoli rientranti, la somma degli angoli esterni formata da ciascun lato, e dal prolungamento di quello, che gli è contiguo, è eguale a quattro retti, qualunque sia d' altronde il numero dei lati del poligono.* Fig. 48.

Dimostrazione. Ciascun angolo esterno, come *a*AB, riunito coll' interno BAF, al quale esso è adiacente, forma una somma eguale a due retti, che trovasi ripetuta per tutto il poligono tante volte quanti vi sono lati, o angoli; la somma degli angoli tanto esterni quanto interni equivarrà

dunque a tante volte due retti quanti lati ha il poligono. Togliendo da questa somma quella degli angoli interni, eguale a tante volte due retti quanti lati ha il medesimo poligono meno due, resterà due volte due retti, ovvero quattro retti per la somma degli angoli esterni.

84. *Osservazione.* Due poligoni sono eguali allorchè dessi sono composti d'un medesimo numero di triangoli eguali, e similmente disposti, ovvero riuniti nella maniera medesima; poichè è manifesto che posti l'uno sull'altro questi poligoni si copriranno perfettamente.

TEOREMA.

85. *Allorchè si conoscono tutti i lati d'un poligono all'eccezione d'un solo, e che si conoscono pure gli angoli compresi tra i lati dati, il poligono è determinato, e può esser costrutto.*

Dimostrazione. Infatti, se nel poligono ABC DEF si conoscono i lati AB, BC, CD, DE, EF, e gli angoli ch'essi comprendono, potremo sopra $A'B' = AB$ far l'angolo $A'B'C' = ABC$; poi prendere $B'C' = BC$; fare nel punto C' sopra $B'C'$ l'angolo $B'C'D' = BCD$; quindi prendere $C'D' = CD$; fare nel punto D' sopra $C'D'$ l'angolo $C'D'E' = CDE$; poi prender $D'E' = DE$; fare nel punto E' l'angolo $D'E'F' = DEF$; e prendere finalmente $E'F' = EF$. Essendo così arrivati al punto F', non vi sarà che una sola maniera d'unirlo col punto A', e di chiudere il poligono $A'B'C'D'E'F'$.

È manifesto che questo poligono sarà eguale in tutte le sue parti al poligono ABCDEF; poichè, se il medesimo si porti sopra quest'ultimo, ponendo $A'B'$ sopra AB, a motivo dell'eguaglianza degli angoli ABC, ed $A'B'C'$, il lato $B'C'$ cadrà sul

suo eguale BC; e continuando così di mano in mano, riconosceremo che i punti A′, B′, C′, D′, E′, F′ cadranno respettivamente sui punti A, B, C, D, E, F : dal che ne segue che i due poligoni si copriranno perfettamente.

86. *Osservazione.* Vi sono più altri casi d'eguaglianza tra due poligoni; io non ho voluto dare nel precedente che un esempio di quest'eguaglianza per dimostrare che un poligono d'un numero qualunque N di lati, e contenente in conseguenza un numero N d'angoli, il che fa in totalità 2N cose, è determinato dalla conoscenza di 2N — 3 di queste cose. Osserveremo qui, come l'abbiam dovuto osservare nei differenti casi d'eguaglianza dei triangoli, che gli N angoli non debbon contare che per N — 1 *dati*, poichè la lor somma è sempre *data* (82).

87. Si chiaman *poligoni simili* quelli, i cui angoli son respettivamente eguali, ed i lati *omologhi* de' quali sono proporzionali.

TEOREMA.

88. *Due poligoni composti d'un medesimo numero di triangoli respettivamente simili, e similmente disposti, hanno i loro angoli respettivamente eguali, i loro lati omologhi proporzionali, e sono in conseguenza simili.*

Dimostrazione. Sieno BAEDC, e *baedc*, *fig.* 51, i poligoni proposti; i triangoli ABC, *abc* essendo simili, hanno i loro angoli omologhi eguali; così si ha Fig. 51.

$$B = b, \quad BAC = bac.$$

Per la ragione medesima, i triangoli ACE, *ace* danno

$$CAE = cae, \quad CEA = cea;$$

dal che ne segue che l'angolo BAE, formato dagli angoli BAC, e CAE nel primo poligono, è eguale all' angolo *bae*, formato dagli angoli *bac*, e *cae* nel secondo. Dimostrerem parimente l'eguaglianza degli angoli AED, ed *aed*, EDC, ed *edc*; quanto agli ultimi angoli BCD, e *bcd*, è manifesto che dessi sono eguali, poichè son formati, uno dagli angoli BCA, ACE, ECD, l'altro dagli angoli *bca*, *ace*, *ecd*, i quali son respettivamente eguali ai primi, come angoli omologhi de' triangoli simili.

Formando le proporzioni, le quali resultano dalla similitudine de' triangoli ABC, e *abc*, ACE ed *ace*, ECD, ed *ecd*, avremo

$$BC : bc :: AB : ab :: AC : ac,$$
$$AC : ac :: AE : ae :: CE : ce,$$
$$CE : ce :: ED : ed :: CD : cd.$$

Il primo rapporto di ciascuna serie, formato dai lati, che son comuni ai triangoli adiacenti, essendo lo stesso che l' ultimo della serie precedente, questi rapporti son tutti eguali tra loro: non prendendo dunque che quelli, i quali contengono i lati de' poligoni, conseguiremo

$$BC : bc :: AB : ab :: AE : ae :: ED : ed :: CD : cd;$$

ciò che dimostra che i lati omologhi sono proporzionali.

TEOREMA.

89. *Allorchè due poligoni sono simili, essi son composti d' un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e similmente disposti.*

Dimostrazione. Poichè, per l' ipotesi, gli angoli d' un dei poligoni son respettivamente eguali a quelli dell' altro, ed i lati omologhi del primo

son

son proporzionali a quelli del secondo, avremo in primo luogo l'angolo B eguale all'angolo *b*, e

$$BC : bc :: AB : ab;$$

dal che ne segue che i triangoli ABC, e *abc* sono simili (66) : gli angoli BAC, e *bac* saran dunque eguali Se si tolgano questi dagli angoli BAE, e *bae* eguali, come appartenenti ai poligoni, i resti CAE, e *cae* saranno eguali; di più, i triangoli simili ABC, ed *abc* dando AB : *ab* :: AC : *ac*, ed i poligoni AB : *ab* :: AE : *ae*, avremo

$$AC : ac :: AE : ae;$$

donde ne segue che i triangoli CAE, e *cae* son pure simili (66). Dimostreremo nella stessa maniera la similitudine di tutti i triangoli di ciascun dei poligoni, qualunque siasi il numero di questi triangoli.

PROBLEMA.

90. *Costruire sopra una retta data un poligono simile ad un poligono dato.*

Soluzione. Sieno *bc*, e BAEDC la retta, ed il poligono dati; faremo sopra *bc*, mediante uno de' metodi del n.° 68, un triangolo *abc* simile al triangolo ABC, ciò che determinerà il punto *a* : per avere il punto *e*, faremo parimente sopra *ac* un triangolo *cae* simile al triangolo CAE; e così di seguito. Il poligono *abcde* sarà simile al poligono ABCDE, poichè dessi saranno composti, l'uno, e l'altro, d'un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e similmente disposti.

Se si portasse il lato *bc* sopra BC da C in b', sarebbe sufficiente tirare pel punto b' la retta $b'a'$ paralella ad AB; poi per il punto a' la retta $a'e'$ paralella ad AE, ec. per formare i triangoli $b'Ca'$,

$a'Ce'$, ec. respettivamente simili ai triangoli BCA, ACE, ec.: il poligono $b'a'e'd'C$ sarebbe in tal maniera costrutto sul lato dato, e simile al poligono BAEDC.

91. *Osservazione.* In ciò, che precede, ho condotte tutte le diagonali da un medesimo angolo: ma si posson dividere dei poligoni in triangoli con più altre maniere, e le proporzioni suddivisate s'estendono egualmente a siffatti casi, trai quali ve n'è uno, ch'è ben di conoscere: questo è quello ove si legano tutti gli angoli del poligono alle due estremità d'un de' suoi lati. Questo caso
Fig. 52. è rappresentato dalla Figura 52, in cui sono riuniti i punti C, D, E coi punti A, e B per mezzo di diagonali.

1.° È manifesto che la posizione de' tre primi punti è fissata, a riguardo della retta AB, allorchè i triangoli ABC, ABD, ABE sono dati: e si vede assai chiaramente in questa maniera che, per determinare un poligono, non bisognerà che un numero di triangoli minore di due unità di quello degli angoli, o dei lati del poligono. Si fa pur manifesto che, se N denota quest'ultimo numero, la determinazione della Figura dipenderà dalle $2(N-2)$ diagonali, condotte da ciascuno degli angoli della base, e da questa base; ciò che fa in tutto $2N-3$ *dati* (86).

2.° Dimostreremo senza difficoltà, presso a poco come nei numeri 88, e 89, che, se i triangoli ABC, ed *abc*, ABD, ed *abd*, ABE, ed *abe* son respettivamente simili, i poligoni ABCDE, ed *abcde* lo saran pure, e che reciprocamente, se questi poligoni sono simili, i triangoli corrispondenti lo saranno essi pure (*).

(*) L'arte di levare *di pianta* in altro non consiste

TEOREMA.

92. *Se si tirino in due poligoni simili due rette, le quali sieno similmente poste in ciascheduno di essi, vale a dire, che passino per dei punti similmente posti sui lati omologhi, e che facciano con questi lati degli angoli eguali tra loro, ovvero che taglino in ciascun poligono due lati omologhi in parti proporzionali, queste rette saranno proporzionali ai lati omologhi de' poligoni.*

Dimostrazione. Sieno le rette GF, e *gf* condotte da dei punti G, e *g* ove s'abbia BG : *bg* :: AB : *ab*, e sotto degli angoli FGB, e *fgb*, che sieno eguali; i triangoli BGC, e *bgc* saranno allora simili, a motivo degli angoli eguali B, e *b*, e dei lati BG, e *bg* proporzionali a BC, ed a *bc*, poichè gli uni, e gli altri lo sono ad AB, e ad *ab*: si ha dunque 1.°

GC : *gc* :: BG : *bg*, ovvero :: AB : *ab*;

e BCG = *bcg*, CGB = *cgb*:

si conclude da ciò che GCF, ovvero BCF—BCG

---

che nel costruire sulla carta dei poligoni simili a quelli, che formano sul terreno i punti, di cui si voglion conoscere le situazioni respettive. Si vede che ciò dee ridursi, in ultima analisi, a concepire questi punti legati tra di loro con de' triangoli, ed a misurare sopra questi triangoli un numero sufficiente d'angoli, o di lati per poterne fare dei simili sulla carta, seguendo i metodi del numero 68. Ecco tutto quel, che può dirsi senza entrar nelle particolarità degl'Istrumenti proprj a misurare gli angoli, particolarità omesse nei Trattati generali, e presso a poco inintelligibili per le persone, che non conoscono quest' Istrumenti, e superflue per quelle, che li conoscono.

è eguale a *gcf*, ovvero *bcf*—*bcg*; e perchè FGB= *fgb*, avremo CGF, oppure FGB—CGB eguale a *cgf*, oppure a *fgb*—*cgb*: i triangoli FCG, e *fcg* saran dunque simili, e daranno

FG : *fg* :: FC : *fc* :: GC : *gc*, ovvero :: AB : *ab*,

poichè abbiamo di sopra

GC : *gc* :: AB : *ab*.

Se in vece di fare gli angoli FGB, e *fgb* eguali, si prendono i punti F, e *f* in modo che BG : *bg* :: FC :: *fc*, i triangoli FCG, e *fcg* saranno allora simili, come aventi un angolo eguale compreso tra lati proporzionali; avremo le medesime conclusioni che sopra, e dimostreremo in questo caso l'eguaglianza degli angoli FGB, e *fgb*.

TEOREMA.

93. *I contorni di due poligoni simili son tra loro come i lati omologhi di questi poligoni.*

Dimostrazione. I poligoni simili ABCDE, *abcde* danno questa serie di rapporti eguali

AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: AE : *ae*,

dai quali concluderemo

AB+BC+CD+DE+AE : *ab*+*bc*+*cd*+*de*+*ae* :: AB : *ab*,

vale a dire che

il contorno ABCDE : al contorno *abcde* :: AB : *ab*.

DELLA LINEA RETTA, E DEL CIRCOLO.

94. Abbiam veduto nel n.° 28 che non si potevan condurre da un medesimo punto ad una linea retta data tre rette eguali; resulta eviden-

temente da ciò che una retta, ed un Circolo non posson tagliarsi in più di due punti.

Qualunque retta, che taglia la Circonferenza del Circolo, e ch'è prolungata al difuori, si chiama *secante*. EF, *fig.* 53, è una secante. Fig. 53.

La parte CD di questa retta compresa nel Circolo chiamasi *corda*.

95. Si dice che la corda CD, la quale passa per l'estremità d'un arco qualunque di Circolo CGD, *sottende* quest'arco; ma bisogna osservare che la medesima retta è nel tempo stesso la corda dell'arco CHD, il quale unito a CGD compone la Circonferenza intera. Dunque, quando il primo arco sarà minore della mezza-circonferenza, il secondo sarà necessariamente maggiore.

96. Allorchè una corda passa pel centro del Circolo, le si dà il nome di *diametro*. La retta AB, che passa pel punto O, è un diametro.

Tutti i diametri del Circolo sono eguali; poichè dessi sono composti di due raggi, e tutti questi raggi son eguali.

E' manifesto che il diametro è la maggior retta, che si possa tirare nella Circonferenza del Circolo; poichè qualunque altra corda CD è minore della somma de' due raggi condotti dalle sue estremità (15).

97. Il diametro AB divide la Circonferenza in due parti eguali; poichè, se si pieghi la Figura lungo la retta AB, la parte AGB della Circonferenza dee confondersi con la parte AHB, senza di che tutti i punti dell'una, o dell'altra non sarebbero egualmente lontani dal centro O.

Lo stesso ragionamento dimostra pure che due Circoli descritti col medesimo raggio sono eguali; poichè è chiaro che, se si ponga il centro

d'uno di questi Circoli su quello dell'altro, le loro Circonferenze debbono combaciarsi.

TEOREMA.

98. *Se si porti un arco qualunque di Circolo sopra un altr'arco del medesimo Circolo, o d'un Circolo descritto col medesimo raggio del primo, in modo che due punti qualunque d'uno degli archi cadano sopra due dell'altro, e le convessità sieno volte dal medesimo lato, il più piccolo di questi archi combacierà per tutta la sua estensione col più grande.*

Dimostrazione. Infatti, se si porti l'arco A′C′ Fig. 54. *fig.* 54, sopra AE ponendo il punto A′ sul punto A, ed il punto C′ cada in C, la corda A′C′ coprirà esattamente AC; e siccome i raggi O′A′, e O′C′ sono eguali ai raggi OA, e OC, il punto O′ si troverà sul punto O (20); allora tutti i punti dell'arco A′C′ debbon cadere sopra quelli dell'arco AC; poichè gli uni son tanto lontani dal centro O′ quanto gli altri lo sono dal centro O: dunque l'arco A′C′ si confonderà interamente con l'arco AC (*).

99. *Corollario.* Segue da ciò che nel medesimo Circolo, o in Circoli descritti coll'istesso rag-

---

(*) La proprietà della Circonferenza del Circolo dimostrata quì sopra è tanto più considerabile perchè dessa non appartiene che a questa curva, ed alla linea retta, e perchè essa rende evidente la similitudine di tutte le parti della Circonferenza del Circolo, ovvero l'uniformità della sua curvatura. Tal'è la ragione, che mi ha impegnato a dare a questa Proposizione un'enunciato diverso da quello, che trovasi nella maggior parte dei Libri elementari, e che fa l'oggetto del corollario seguente.

gio, gli archi, le cui corde sian eguali, sono eguali semprechè detti archi sieno della medesime specie, vale a dire, che dessi sieno o tutti minori della mezza-circonferenza, o tutti maggiori. Infatti, allorchè le corde son poste l' una sull' altra, come nel caso precedente, gli archi si ricoprono perfettamente tra loro.

La Proposizione inversa è egualmente vera, vale a dire. che quando gli archi sono eguali (in un medesimo Circolo, o in Circoli descritti col medesimo raggio), le corde sono eguali; poichè, essendo posti gli archi l' uno sopra l' altro, e combaciandosi esattamente, le estremità del primo si confondono con quelle del secondo. Così A′C′ essendo posto sopra AC in modo che il punto A′ sia sopra A, il punto C′ sia sopra C, le rette AC, ed A′C′ si coprono esattamente, e son eguali.

TEOREMA.

100. *Nel medesimo Circolo, o in Circoli eguali il maggior arco ha la maggior corda, e reciprocamente (semprechè gli archi, i quali si paragonano, sieno minori della mezza-circonferenza.)*

Dimostrazione. 1.° L' arco AE essendo maggiore dell' arco AC, l' angolo AOE sarà visibilmente maggiore dell' angolo AOC, e pel n.° 19, il lato AE del triangolo AOE sarà maggiore del lato AC del triangolo AOC; poichè questi triangoli hanno due lati respettivamente eguali.

2.° La corda AE essendo maggiore della corda AC, l' angolo AOE sarà maggiore dell' angolo AOC; l' arco AE sorpasserà dunque l' arco AC.

PROBLEMA.

101. *Essendo dati due archi del medesimo*

Circolo, o di Circoli eguali, trovare il rapporto delle loro lunghezze.

Soluzione. È manifesto che il Problema proposto si risolverebbe come quello del n.° 5, se si potessero portar gli archi di Circolo l'uno sull'altro, come si fa a riguardo delle rette; ma una simile soprapposizione non potendo aver luogo nella pratica, vi si supplisce con quella delle corde, le quali, allorchè son eguali, corrispondono ad archi eguali. La corda dell' arco CD, *fig.* 55, potrà essere riportata due volte sull'arco AB da A in E, e l'arco AE così determinato sarà composto di due parti Ad, e dE, eguali ciascuna a CD; avrem dunque

Fig. 55.

$$AB = 2\,CD + EB.$$

Prenderemo la corda del resto EB per portarla sull' arco CD da C in F, il che s' effettuerà una volta, e lascierà per resto l'arco FD; dal che ne segue

$$CD = EB + FD:$$

finalmente la corda del secondo resto FD potendo portarsi quattro volte sul primo EB, avremo

$$EB = 4\,FD.$$

Risalendo da quest' ultimo valore a quello degli archi precedenti, otterremo

$$EB = 4\,FD, \quad CD = 5\,FD, \quad AB = 14\,FD;$$

l'arco FD, misura comune degli archi AB, e CD, essendo contenuto 14 volte nell' uno, e 5 volte nell' altro, concluderemo che gli archi proposti sono tra loro come i numeri 14, e 5.

L' operazione si termina quì, come pel caso delle linee rette, allorchè trovasi un resto, il quale sia contenuto esattamente nel precedente,

ovvero ch' esso sia tale che il resto seguente sfugga per la sua piccolezza ai nostri sensi (*).

102. *Osservazione*; Se si concepisca che una retta AB, *fig.* 56, la quale taglia il Circolo in due punti A, e B, giri intorno ad uno di questi punti, per esempio, intorno ad A, e tendendo ad escire dal Circolo essa prenda delle posizioni tali come AB', si fa manifesto che i punti d' intersezione della retta, e del Circolo si ravvicinano quanto mai vogliasi, e che finalmente vi è un' ultima posizione AC, nella quale questi due punti essendo riuniti in un solo, la retta non ha che un punto di comune col Circolo, ovvero non fa che toccarlo. In questa posizione la retta AC è *tangente* del Circolo. Fig. 56.

TEOREMA.

103. *La perpendicolare condotta da un punto della Circonferenza del Circolo sul raggio, che passa per questo punto, è tangente del Circolo; e reciprocamente la tangente ad un punto qualunque della Circonferenza è perpendicolare all' estremità del raggio condotto per questo punto.*

Dimostrazione. La linea AB, *fig.* 57, perpendicolare sul raggio AO nel punto A, ha tutti i suoi altri punti più lontani dal centro O di quel che non lo è il punto A; poichè tutte le rette condotte da un lato, o dall' altro, come OB, ed OC, son delle oblique necessariamente più lunghe di AO (28). I punti C, e B sono in conseguenza fuori del Circolo, e la linea AB non avendo che un sol Fig. 57

(*) Questa maniera di determinare il rapporto di due archi di Circolo si trova nelle *Memorie dell' Accademia delle Scienze*, *anno* 1724, *pag.* 250.

punto A di comune con la Circonferenza DA, tangente.

Egli è altrettanto facil vedere che la tangente al punto A non può essere che la retta AB perpendicolare sopra AO; poichè questa tangente non avendo di comune con la Circonferenza che il punto di *contatto* A, e tutti gli altri suoi punti essendo più lontani dal centro di detto punto, ne segue che il raggio AO è la più corta linea, che si possa condurre dal centro sulla tangente, e che in conseguenza detto raggio è perpendicolare su questa tangente.

104. *Corollario.* Segue da ciò che si conduce una tangente ad un punto dato A della Circonferenza d'un Circolo DAE alzando una perpendicolare AB all' estremità del raggio, che passa per questo punto.

TEOREMA.

Fig. 58. 105. *Qualunque retta* CD, *fig.* 58, *alzata perpendicolarmente sul mezzo d'una corda* AB, *passa pel centro* O *del Circolo, e pel mezzo* C *dell'arco sotteso da questa corda.*

Dimostrazione. Poichè CD è, per ipotesi, perpendicolare sul mezzo di AB, essa dee passare per tutti i punti egualmente distanti dai punti A, e B; il centro O è uno di questi punti, poichè desso è ad egual distanza dalle estremità A, e B, le quali sono sulla Circonferenza ACB. Il punto C, ove la perpendicolare CD incontra la Circonferenza, essendo egualmente lontano dall' estremità A, e B dell'arco ACB, le corde AC, e BC, saranno necessariamente eguali; gli archi sottesi da queste corde saranno dunque eguali (99); il punto C sarà dunque il mezzo dell' arco ACB:

dunque la retta CD passerà pel centro O, e pel mezzo dell'arco sotteso dalla corda AB.

106. 1.° *Corollario.* 1.° Poichè due punti bastano per determinare la posizion d'una retta (3), e il mezzo d'una corda, il centro del Circolo, ed il mezzo dell'arco sotteso dalle corda son sempre sulla medesima retta, ne segue che, quando si sa che una retta data passa per due di questi punti, si dee concludere ch' essa passa necessariamente pel terzo.

2.° Siccome non si può abbassare da un punto dato sopra una retta che una sola perpendicolare (32), è parimente manifesto da ciò, che precede, che qualunque perpendicolare abbassata dal centro, o dal mezzo dell' arco sopra la corda cadrà sul mezzo di questa retta.

107. 2.° *Corollario.* Segue ancora dal *Teorema* precedente che, per dividere un arco in due parti eguali, serve d'alzare una perpendicolare sul mezzo della corda, che sottende quest'arco; poichè questa perpendicolare passerà pel mezzo dell' arco proposto.

TEOREMA.

108. *In un medesimo Circolo gli archi intercetti tra due corde paralelle, ovvero tra una tangente, ed una corda paralelle son eguali.*

Dimostrazione Se le corde BC, DE, e la tangente FG, *fig* 59, son respettivamente paralelle, e s' uniscano il centro O, ed il punto di contatto A con un raggio, questo raggio essendo perpendicolare sulla tangente FG (103), lo sarà pure sulle corde BC, e DE (42); esso dividerà in due parti eguali gli archi BAC, e DAE; ed in conseguenza, se dagli archi AB, e AC eguali, come Fig. 59.

metà dell' arco BAC, si tolgano gli archi AD, ed AE eguali, come metà dell'arco DAE, i resti BD, ed EC saranno eguali: ciò appunto è la prima parte dell' enunciato del Teorema. L'eguaglianza degli archi AB, ed AC dimostra la parte seconda.

TEOREMA.

109. *Se dai vertici* O, *ed* O' *di due angoli* AOC, *ed* A'O'C', fig. 60, *si descrivan due archi di Circolo col medesimo raggio, il rapporto degli archi compresi tra i lati di ciascun angolo sarà lo stesso di quello di questi angoli.* Fig. 60.

Dimostrazione. Se gli archi AC, ed A'C hanno una misura comune AB = A'B', portando questa misura comune sopra ciascuno tante volte quant' essa vi è contenuta, gli divideremo ambedue in parti eguali; e se si uniscono i differenti punti di divisione col vertice dell' angolo corrispondente con delle rette, come OB, e O'B', divideremo gli angoli AOC, ed A'O'C' in tante parti eguali quante ne contengono gli archi AC, ed A'C'.

Infatti, le corde AB, ed A'B' essendo eguali, i triangoli AOB, e A'O'B' saranno eguali, come aventi tutti i loro lati respettivamente eguali (20), poichè d'altronde le rette OA, OB, O'A', ed O'B' son eguali, come raggi di Circoli eguali: l'angolo AOB sarà dunque eguale all' angolo A'O'B'. Ciò premesso, gli angoli AOC, ed A'O'C', comprendendo ciascuno tanti angoli eguali ad AOB quante gli archi AC, ed A'C' contengono parti eguali ad AB, saranno evidentemente nel medesimo rapporto di questi archi, ed avran per misura comune l' angolo AOB.

Il ragionamento precedente esige che gli archi AC, ed A'C' sieno commensurabili tra di loro;

ma la Proposizione averebbe egualmente luogo quando ancora essi fossero incommensurabili poichè non si può supporre che gli angoli AOC, ed A′O′C′, *fig.* 61, sieno in un rapporto maggiore, o minore di quello di questi archi. Fig. 61.

Se, per esempio, in luogo d'aver questa proporzione

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'C',$$

si avesse la seguente

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd,$$

l'arco $A'd$ essendo maggiore di $A'C'$, e si dividesse l'arco AC in parti eguali tanto piccole perchè, essendo portate sull'arco $A'C'$, uno de' punti di divisione e cadesse tra C', e d, avrebbesi tra gli angoli AOC, $A'O'e$, e gli archi AC, ed $A'e$, respettivamente commensurabili, questa proporzione

$$AOC : A'O'e :: AC : A'e,$$

i cui antecedenti sono i medesimi di quelli della precedente; ciò che darebbe in conseguenza

$$A'O'C' : A'O'e :: A'd : A'e;$$

resultato assurdo, poichè $A'O'C' < A'O'e$, ed $A'd > A'e$.

Se si prendesse l'arco $A'd'$ minore di $A'C'$, avrebbesi allora

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd',$$

e poichè pel punto di divisione e' avrebbesi

$$AOC : A'O'e' :: AC : A'e',$$

ne seguirebbe, come quì sopra,

$$A'O'C' : A'O'e' :: A'd' : A'e';$$

proporzione parimente assurda, perchè

$$A'O'C' > A'O'e',\ A'd' < A'e'.$$

È manifesto che la reciproca di questa Proposizione non ha bisogno d'una dimostrazione par-

ticolare; poichè il rapporto degli archi non può essere eguale a quello degli angoli senza che quest' ultimo non sia eguale a quello degli archi (*).

110. 1.° *Corollario.* Il rapporto degli archi AC, ed A'C' essendo lo stesso di quello degli angoli AOC, ed A'O'C', ne risulta che questi archi son la misura naturale degli angoli; e dietro a queste nozioni si dice che *la misura d'un angolo è l'arco di Circolo compreso trai suoi lati, e descritto dal suo vertice come centro.* Quest'espressione sembra a prima vista oscura; poichè non si possono misurare delle grandezze qualunque se non che con altre grandezze della specie medesima. L'arco del Circolo essendo una linea, è eterogeneo rispetto all'angolo, il quale è una superficie (7); ma fa di mestieri osservare che si sottintende qui preso per unità tanto l'arco quanto l'angolo, che corrisponde a quest' arco, e che l'enunciato di sopra riducesi al seguente. *Qualunque angolo contiene tante volte un certo angolo arbitrario, preso per unità, o per termine di paragone, quante*

(*) Io credo di dover far osservare che questa Proposizione, la quale ci contentavamo quasi d'enunciare negli *Elementi* adottati in Francia prima del 1794 è stata dimostrata presso a poco come di sopra fino dal 1760 in quelli di *Karsten*, e l'era stata forse ancora nelle più antiche Opere. Il mezzo d'altronde si offre di per sè stesso mediante una forma di ragionamento impiegata da *Euclide* per un simil passaggio dal commensurabile all'incommensurabile e, siccome io l'ho detto altrove (*Saggi sull' Insegnamento*), allorchè ci limitiamo alle Proposizioni veramente necessarie degli *Elementi di Geometria*, non resta che occuparci della disposizione, che le collega meglio le une con l'altre, le rende piu evidenti, e più facili a ritenersi.

l' arco compreso tra i suoi lati, e descritto dal suo vertice come centro, contiene l' arco del medesimo Circolo compreso trai lati di questo secondo angolo, e descritto dal suo vertice come centro.

Si fa manifesto da ciò che gli archi di Circolo non sono introdotti che per servire di termini di paragone, e che per trovare il rapporto numerico di due angoli qualunque, bisognerà cercare, col metodo del n.° 101, quello de' due archi descritti dai loro vertici come centri, e con un raggio arbitrario, ma lo stesso per ambedue.

L' angolo, che sembra il più proprio a servir d' unità, è l' angolo retto. Quest' angolo comprende evidentemente tra i suoi lati la quarta parte della Circonferenza; poichè, se dal punto O, come centro, *fig.* 62, si descriva una Circonferenza, la retta AB ne sottenderà la metà (97); i due angoli retti COB, COA, essendo eguali, comprenderanno ciascuno la metà di questa metà (n° preced.), vale a dire il quarto della Circonferenza intera. Avrem dunque la misura d' un angolo paragonando l' arco compreso trai suoi lati con quello, che intercetta, sulla medesima Circonferenza, l' angolo retto, che ha il suo vertice al centro. Fig 62.

111. 2.° *Corollario.* Segue ancora dal Teorema precedente che le rette, le quali dividono un arco in più parti eguali, dividono pure in un medesimo numero di parti eguali l' angolo misurato da quest' arco, e che in conseguenza la divisione d' un angolo si riduce a quella dell' arco, che gli serve di misura. Disgraziatamente la *Geometria elementare* non somministra che il mezzo di dividere un arco in due parti eguali.

Questo mezzo consiste (107) nell' inalzare una perpendicolare CO, *fig.* 58, sul mezzo della Fig. 58.

corda AB; e questa perpendicolare dividerà pure l'angolo AOB in due parti eguali. Si può d'altronde convincersi *a priori* dell' eguaglianza degli angoli AOD, e BOD mediante quella de' triangoli della stessa denominazione.

Potremo, col medesimo mezzo, divider di nuovo ciascuna metà dell'arco ACB, o dell'angolo AOB, in due parti eguali, e spinger pure la divisione seguendo i numeri 2, 4. 8, 16, 32, 64. ec.: ma non sarà possibile di divider quest' arco, o quest' angolo in 3, 5, ec. parti eguali.

TEOREMA.

112. *Allorchè un angolo ha il suo vertice posto sulla Circonferenza d'un Circolo, esso ha per misura la metà dell'arco compreso tra i suoi lati.*

Dimostrazione. 1.° Suppongo che l'angolo proposto sia BAC, di cui uno de' lati AC passa pel centro O del Circolo, *fig.* 63. Se per questo punto si conduca il diametro DE paralello ad AB, faremo l'angolo DOC eguale a BAC, come corrispondente per rapporto alla secante AC, ed avente per misura l'arco DC compreso tra i suoi lati, e descritto dal suo vertice come centro. Così l'arco DC sarebbe la misura dell'angolo BAC, se il vertice A di quest' ultimo fosse trasportato in O; ma l'arco DC è in primo luogo eguale all'arco AE, poichè quest'ultimo misura l'angolo AOE opposto al vertice riguardo a DOC, e che gli è in conseguenza eguale: poi gli archi AE, e BD essendo eguali, come compresi tra corde paralelle (108), ne segue che l'arco DC è pur eguale a BD: dunque l'arco BC, composto di BD, e di DC, contiene due volte l'arco DC: dunque esso è il doppio della misura dell'angolo BAC.

Fig. 63.

2.°